# Квадратична функція

Нестеренко Ольга, ФКНФМ, 321 група

# Означення

Функцію вигляду $y = ax^2 + bx + c$, де x—незалежна змінна, а ,

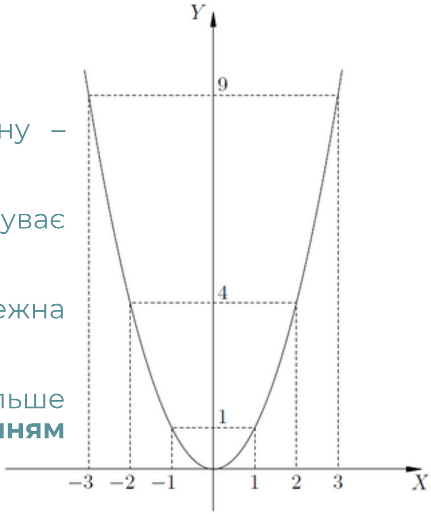
деякі числа, причому а $\neq 0$, називають *квадратичною функцією*.

Незалежну змінну називають **аргументом**, а залежну – **функцією**.

**Область визначення** D(f) – усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент).

**Область значень** E(f) – усі значення, яких набуває залежна змінна.

**Найбільшим значенням функції** називають найбільше число з області значень функції, а **найменшим значенням функції** – відповідно найменше таке число.



# Означення

Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають **нулем функції**.

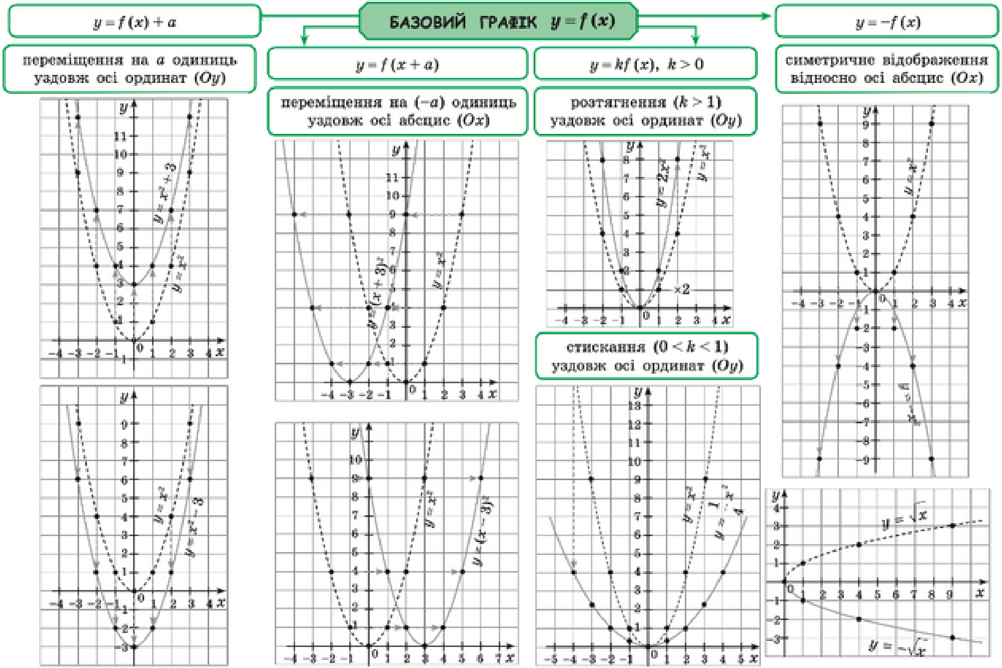
Проміжок, на якому функція зберігає свій знак, називають проміжком **знакосталості функції.**

Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

# Найпростіші перетворення графіків функцій

# Найпростіші перетворення графіків функцій



## КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D(y) = R$

Якщо $b = 0$, то функція парна.

### $a > 0$

$D > 0$

$x_1,\ x_2$ — корені рівняння, $x_2 > x_1$.

| $x$ | $(-\infty;\ x_1)$ | $x_1$ | $(x_1;\ x_2)$ | $x_2$ | $(x_2;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | + | 0 | – | 0 | + |

$D = 0$

$-\dfrac{b}{2a}$ — один корінь

| $x$ | $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | + | 0 | + |

$D < 0$

Коренів немає

| $x$ | $(-\infty; +\infty)$ |
|---|---|
| $y$ | + |

Функція спадає при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$;

функція зростає при $x \in \left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

### $a < 0$

$D > 0$

$x_1,\ x_2$ — корені рівняння, $x_2 > x_1$.

| $x$ | $(-\infty;\ x_1)$ | $x_1$ | $(x_1;\ x_2)$ | $x_2$ | $(x_2;\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | – | 0 | + | 0 | – |

$D = 0$

$-\dfrac{b}{2a}$ — один корінь

| $x$ | $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | – | 0 | – |

$D < 0$

Коренів немає

| $x$ | $(-\infty; +\infty)$ |
|---|---|
| $y$ | – |

Функція зростає при $x \in \left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$;

функція спадає при $x \in \left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

# Властивості

| Властивості функції $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ | | |
|---|---|---|
| | $a > 0$ | $a < 0$ |
| Область визначення | $(-\infty; +\infty)$ | |
| Область значень | $[y_в; +\infty)$ | $(-\infty; y_в]$ |
| Графік | парабола з вершиною $(x_в; y_в)$ | |
| Напрям віток | угору | униз |
| Нулі функції | корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ | |
| Зростає на проміжку | $[x_в; +\infty)$ | $(-\infty; x_в]$ |
| Спадає на проміжку | $(-\infty; x_в]$ | $[x_в; +\infty)$ |
| Найбільше значення функції | - | $y_в$ |
| Найменше значення функції | $y_в$ | - |

# Побудова графіка функції

**1-й спосіб.** Знаходження координат вершини параболи та знаходження точок перетину параболи з осями координат.

*Алгоритм побудови графіка функції* $y = ax^2 + bx + c$

1. Визначити напрям віток параболи ($a > 0$, вітки вгору; $a < 0$, вітки вниз)
2. Знайти координати вершини параболи $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = f(x_в)$ і позначити її на координатній площині;
3. Визначити точки перетину графіка функції з осями Ох (у = 0) та Оу (х= 0);
4. Побудувати ще кілька точок параболи і стільки ж точок, симетричних їм відносно прямої $x = x_в$;
5. Побудувати графік.

# Побудова графіка функції

**2-й спосіб.** Виділення повного квадрата квадратного тричлена.

Розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Виділимо у тричлені $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Отже, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Позначимо $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Тоді $y = a(x - x_в)^2 + y_в$.

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох перетворень – перенесення уздовж координатних осей.

# Побудувати графік функції $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

1. $a > 0$, вітки напрямлені вгору
2. Знайдемо координати вершини параболи $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = f(x_в)$:

   $x_в = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2,$ $\quad\quad y_в = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 6 = -2$

   (2;-2) -вершина параболи
3. Визначимо точки перетину графіка функції з осями Ох та Оу:

   Перетин з віссю Ох: $\quad y = 0$

   $2x^2 - 8x + 6 = 0$

   $D = b^2 - 4ac$

   $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 64 - 48 = 16$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

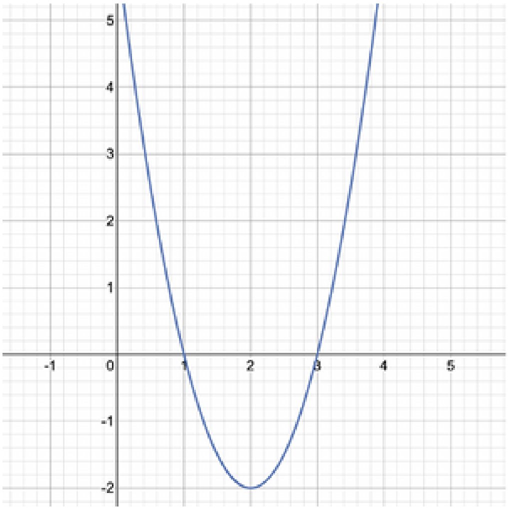
   $x_1 = \frac{8+4}{2 \cdot 2} = 3$ $\quad\quad x_2 = \frac{8-4}{2 \cdot 2} = 1$

   (3;0) і (1;0) – точки перетину з віссю Ох

   Перетин з віссю Оу: $\quad x = 0$

   $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 6 = 6$

   (0;6) – точка перетину з віссю Оу




4. Побудуємо ще точку, симетричну точці (0;6) відносно прямої $x = x_в$:

   $x = 4$ $\quad\quad f(4) = 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 6 = 6$ $\quad\quad (4;6)$

# Дякую за увагу!