ОСНОВНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Для геометричних побудов у просторі застосовуються такі способи:

1. Ефективні побудови.
2. Уявні побудови.
3. Побудови на проекційному рисунку

Серед стереометричних задач на побудову велике значення мають задачі на побудову многогранників. Ці конструктивні задачі треба розв’язувати на проекційному рисунку, що забезпечує правильність і наочність.

Властивості паралельної проекції можна сформулювати так:

1. Проекція точки є точка (рис. 1).

2. Якщо пряма не паралельна напряму проектування, то її проекція є пряма (рис. 2).

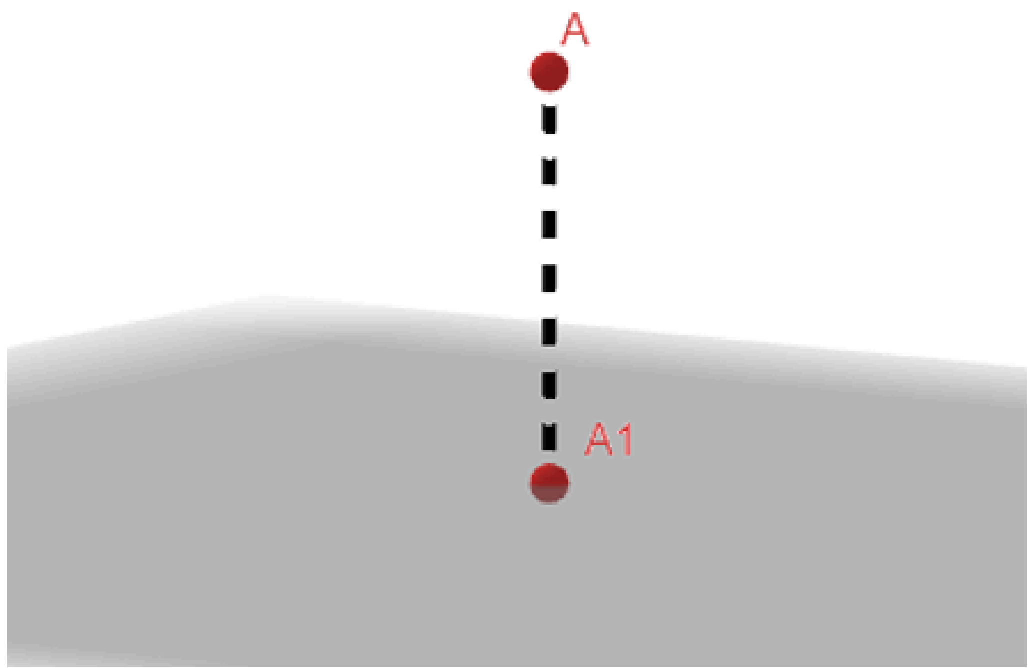

Рис. 1

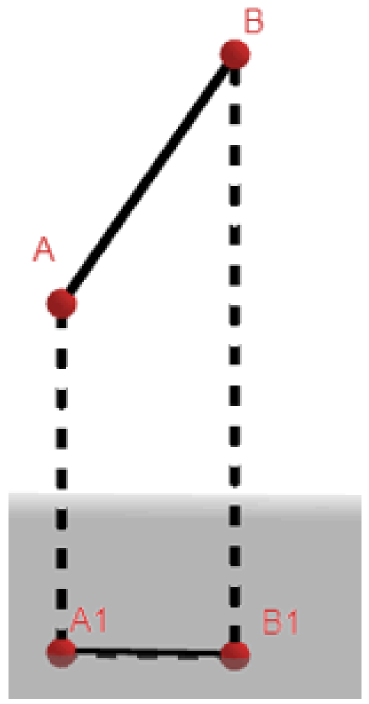

Рис. 2

3. Проекція паралельних прямих або паралельні, або суміщаються (рис. 3).

4. Якщо точка C ділить відрізок у відношенні $a\colon b$, то проекція точки C ділить проекцію відрізка в тому самому відношенні (рис. 1.4).

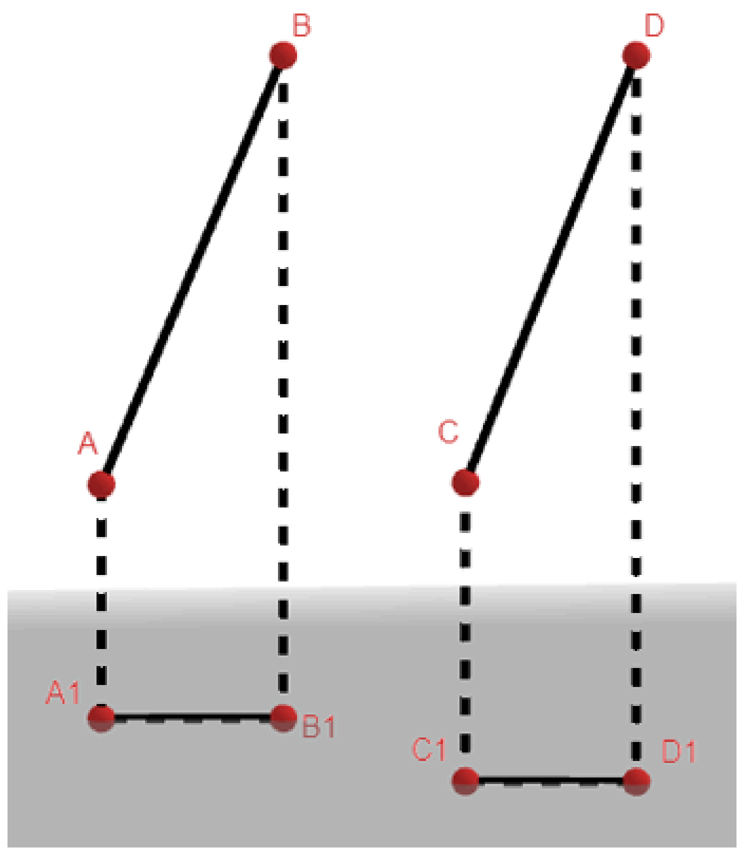

Рис. 3

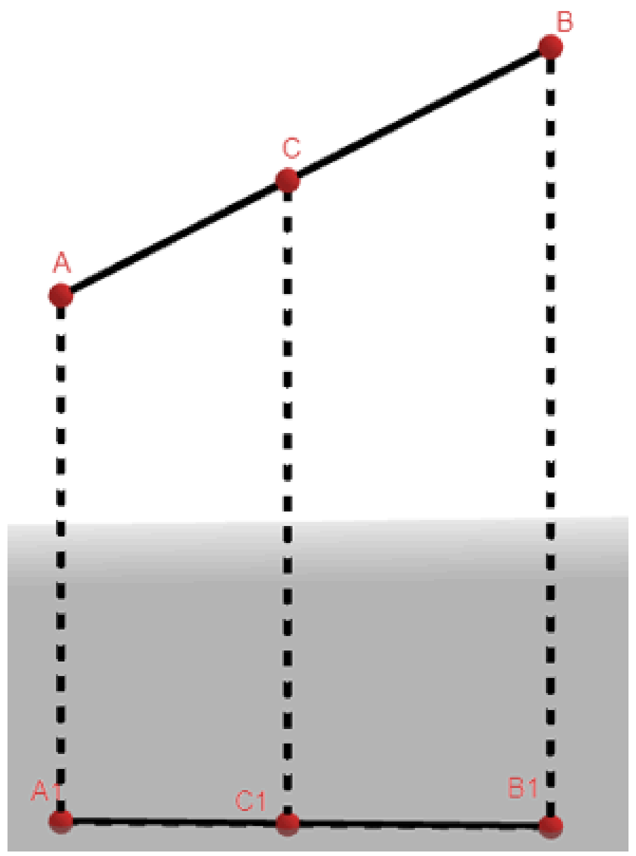

Рис. 4

Перерізом многогранника називається фігура, що утворена лініями перетину січної площини з гранями многогранника.

Суть задачі на побудову переріза полягає в побудові слідів площини перерізу на гранях даного многогранника. В навчально-методичній літературі розглядається два методи побудови перерізів: метод зовнішніх та метод внутрішніх слідів.

Коли будують переріз за методом зовнішніх слідів, то за першу основу площину беруть площину основи многогранника (або площину довільної грані, якщо многогранник не має грані, яка називається основою), а за другу основу площину – по черзі кожну з бічних граней. Розглянемо такий приклад.

1.**Метод слідів січних площин.** Суть методу слідів полягає в тому, що будується слід площини перерізу на площині основи або бічної грані многогранника, яким і буде лінія перетину цих площин. Потім знаходять точки перетину цього сліду з площинами бічних граней і діагональних перерізів цих многогранників. Ці точки разом з даними точками площини перерізу визначають прямі, яким належать сторони шуканого перерізу.

Приклад 1. Дано чотирикутну піраміду $SABCD$ (рис. 5), точки $P, Q, R \mid P \in [SA], Q \in [SB], R \in [SD]$.

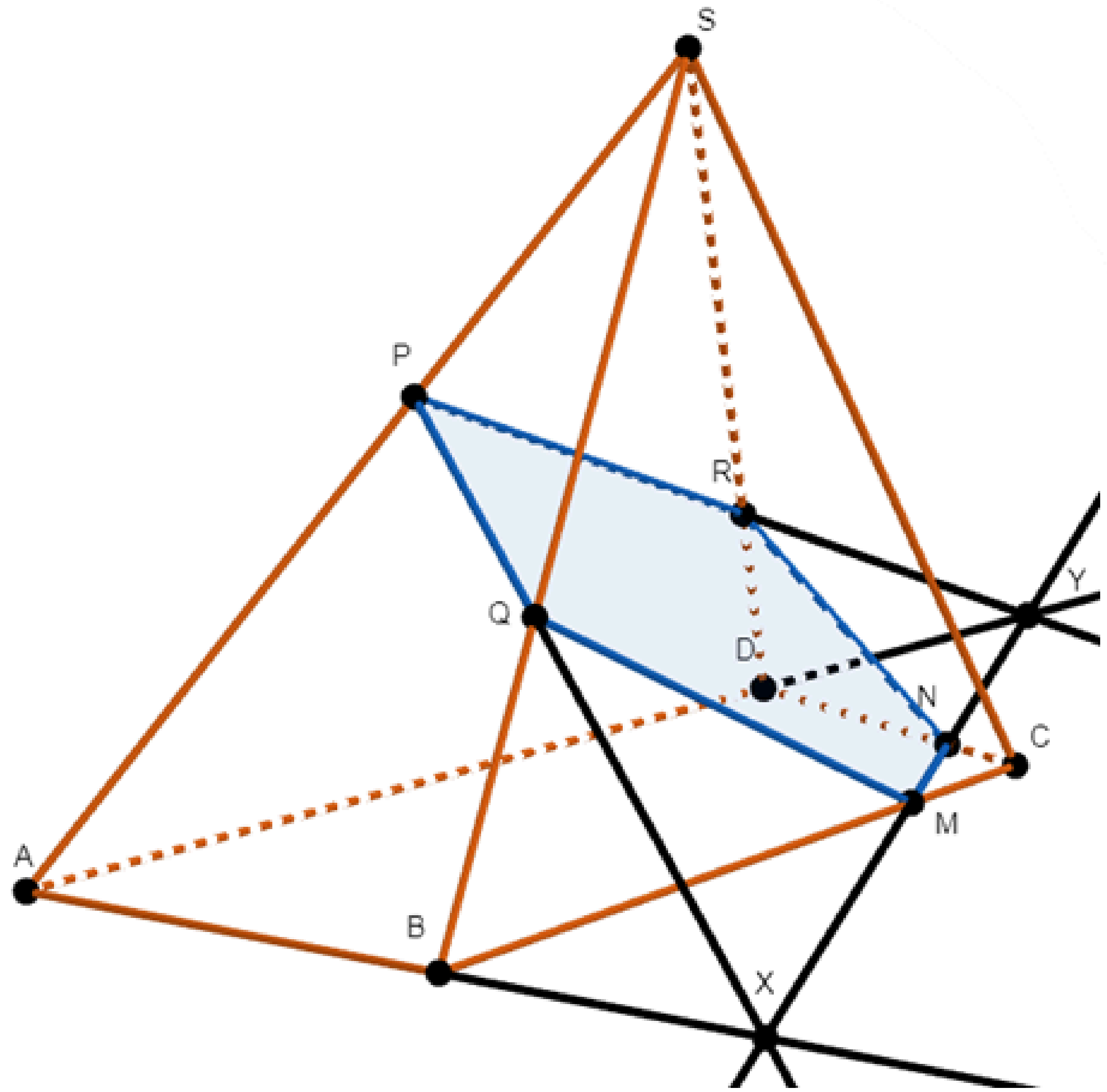

Рис. 5

Побудувати переріз (PRQ) піраміди.

Щоб побудувати $(PRQ) \cap (ABCD)$, досить побудувати дві їх спільні точки $X = (PQ) \cap (AB)$ і $Y = (PR) \cap (AD)$. (XY) – слід. Знаходимо $M = (XY) \cap [BC]$ і $N = (XY) \cap [DC]$. Фігура $PQMNR$ – шуканий переріз.

2. **Метод поділу n-кутної призми(піраміди) на трикутники**. З даної n-кутної призми(піраміди) виділяється та трикутна, на ребрах якої лежать точки, що визначають площину перерізу. Будується переріз цієї призми, а потім – перерізи інших трикутних призм, які мають спільні частини з даним многогранником.

Приклад 2. Дано призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 6). Точки $P \in [AA_1]$, $Q \in [B_1B], R \subset [E_1E]$. Побудувати переріз призми площиною PQR. Розв'язок. ΔPQR – переріз призми $ABEA_1B_1E_1$. З цією призмою мають спільні частини призми $ABCA_1B_1C_1$ і $ADEA_1D_1E_1$.Будуємо $(MM_1) = (BEB_1E_1) \cap (ACC_1A), T_1 = (QR) \cap (MM_1), F = (PT_1) \cap (CC_1).\Delta PQR$ – переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною перерізу.

Точку K будуємо аналогічно побудові точки F. П'ятикутник $PQFKR$ – шуканий переріз.

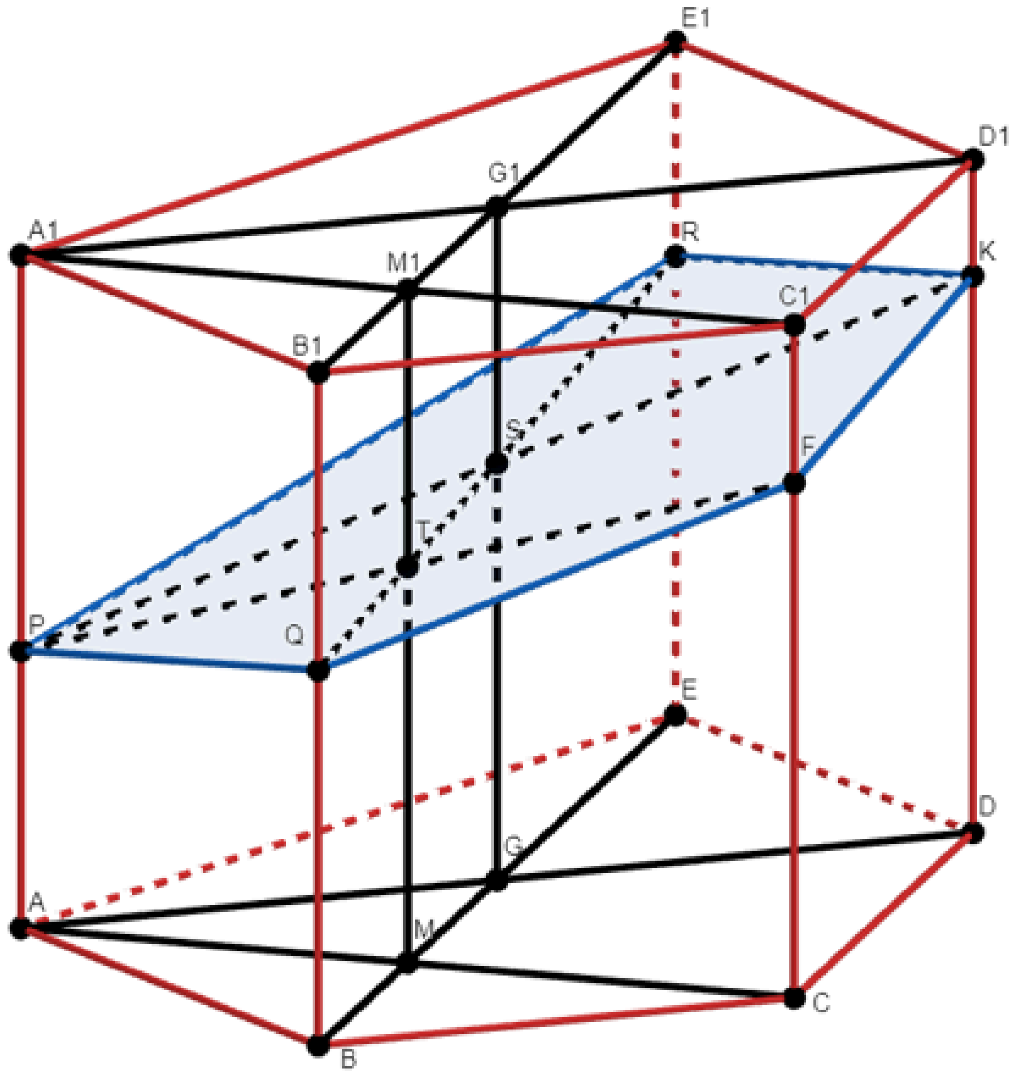

Рис. 6

3.**Метод доповнення *n*-кутної призми (піраміди) до трикутної**. Задана призма (піраміда) добудовується до трикутної, будується її переріз. Шуканий переріз дістанемо як частину перерізу трикутної призми.

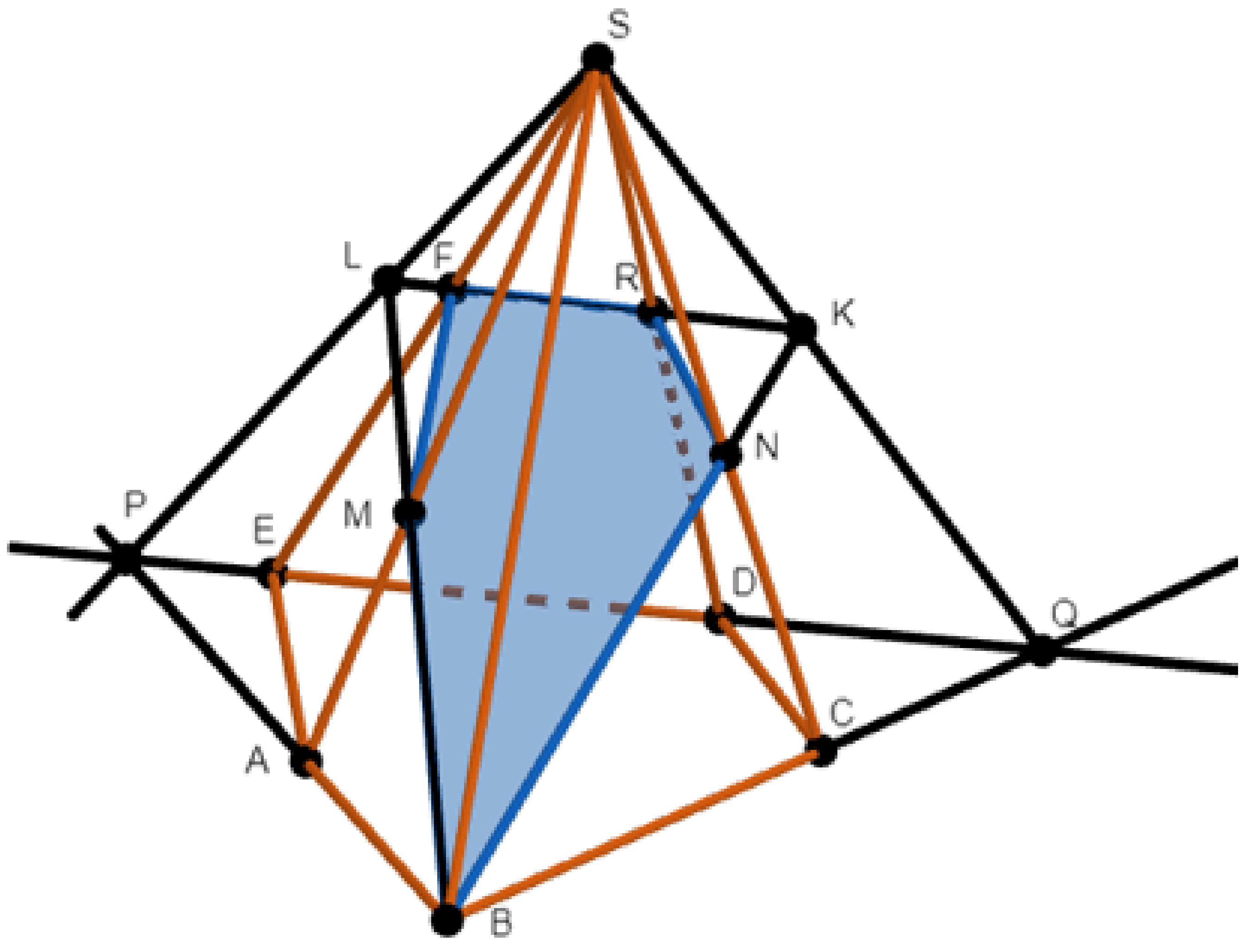

Рис. 7

Приклад 3. Дано піраміду $SABCDE$ (рис. 7) і точку $M \in SA$, $N \in SC$. Побудувати переріз площиною MBN.

Розв'язання.

Будуємо $P = BA \cap DE, Q = BC \cap DE, K = BN \cap SQ, L = BM \cap SP, F = LK \cap SE, R = LK \cap SD$. Фігура $MBNRF$ – шуканий переріз

4.**Метод паралельних прямих**. Коли врахувати, що лінії перерізу паралельних площин площиною перерізу паралельні, то маючи лінію перерізу на одній з паралельних площин і точку на іншій, будують пряму, інциденту цій точці і паралельну лінії перерізу першої площини. У цьому полягає суть методу паралельних прямих.

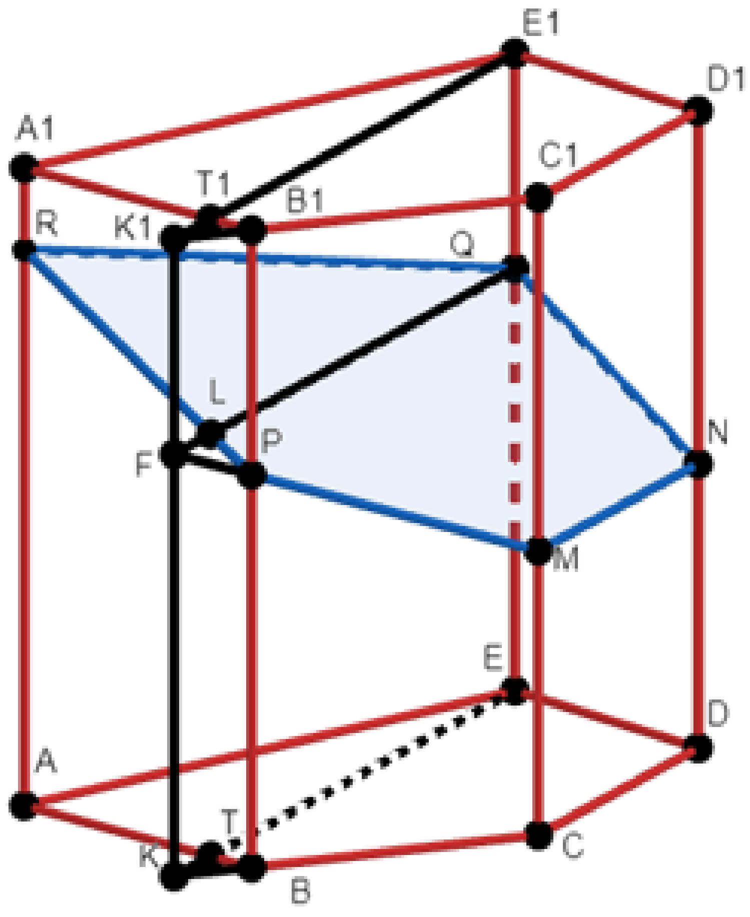

Рис. 8

Приклад 4. Побудувати переріз даної п'ятикутної призми $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ площиною PMN. $P \in BB_1, M \in CC_1, N \in DD_1$.

Розв'язання.

Проведемо площину $EE_1TT_1 \parallel (DD_1CC_1)$ (рис. 8). Будуємо $KK_1 = TEE_1 \cap CBB_1$, $D = MP \cap KK_1$, $FQ \parallel MN$, $L = FQ \cap ABB_1$, $TT_1 = (KEE_1) \cap (ABB_1)$, $R = PL \cap AA_1$. $PMNQR$ – шуканий переріз.

5. **Метод внутрішнього проектування**

Метод внутрішнього проектування ґрунтується на тому, що і при паралельному, і при центральному проектуванні властивості відповідних елементів зберігаються. При побудові перерізів призм внутрішнім проектуванням беруть паралельне проектування у напрямі бічних ребер призми, а у випадку з пірамідами – центральне проектування з центром у вершині піраміди.

Завдання 2

Приклад 5. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки, дані на різних гранях.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – зображення призми, $N \in (ABB_1A_1)$, $M \in (BB_1CC_1)$, $F = (CC_1DD_1)$ – дані точки площини перерізу (рис. 9).

Побудова перерізу передбачає знаходження точки перетину одного з бічних ребер з площиною перерізу. Використаємо метод внутрішнього проектування у напрямі бічних ребер призми. Знайдемо точку перерізу на ребрі AA_1. Точки $M_1 \in BC$, $N_1 \in AB$, $F_1 \in CD$ – паралельні проекції даних точок у площині нижньої основи призми. Побудуємо точку $O_1 = N_1F_1 \cap AM_1$, і її прообраз $O = NF \cap OO_1$, де $OO_1 \parallel AA_1$. Тоді пряма MO перетинає ребро AA_1 у точці A_2, яка належить площині перерізу. Далі знайдемо точку $B_2 = A_2N \cap BB_1$, точку $C_2 = B_2M \cap CC_1$ і точку $D_2 = C_2F \cap DD_1$.

Чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$ – шуканий переріз.

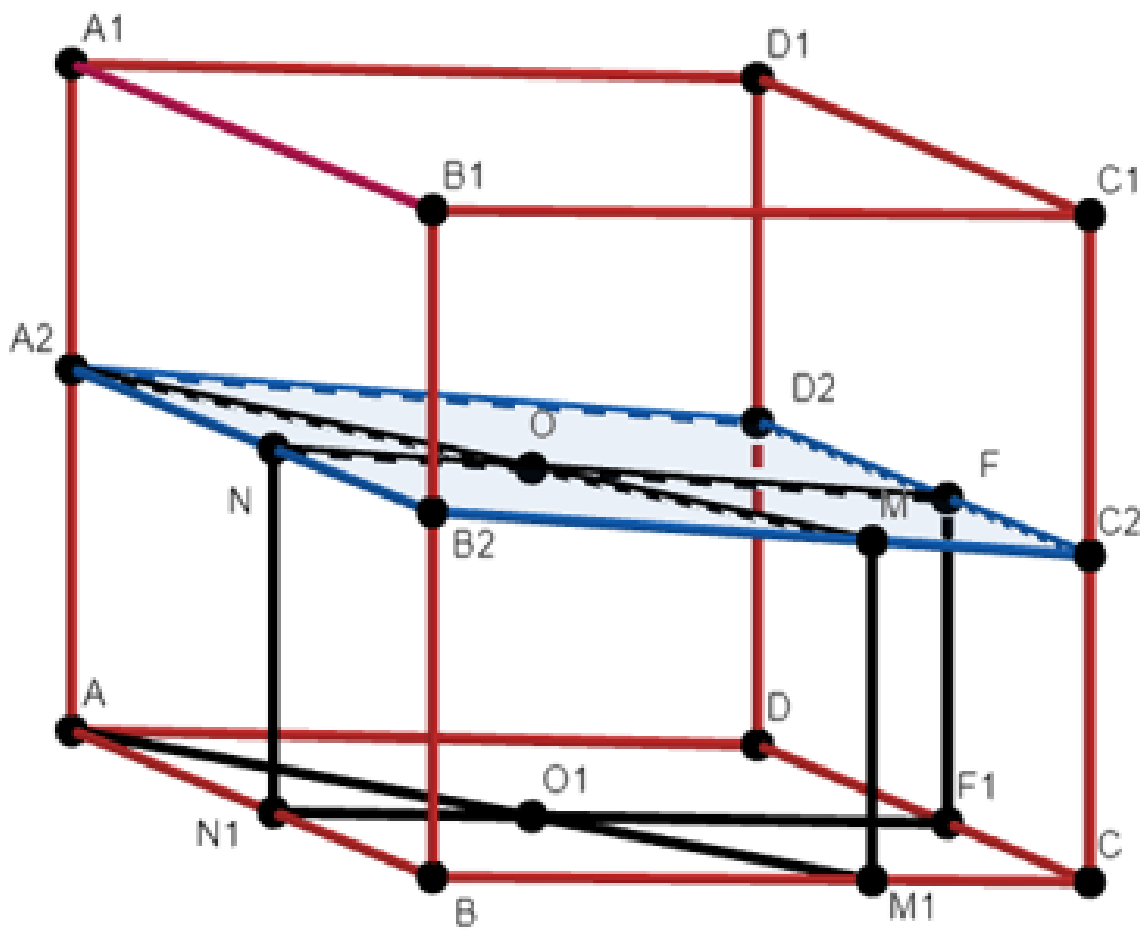

Рис. 9

Завдання Геометрія 11 клас (Істер)

Задача 2.56 Площа меншої бічної грані прямокутного паралелепіпеда дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу цього паралелепіпеда, який ділить навпіл кут між двома суміжними бічними гранями

Розв'язання:

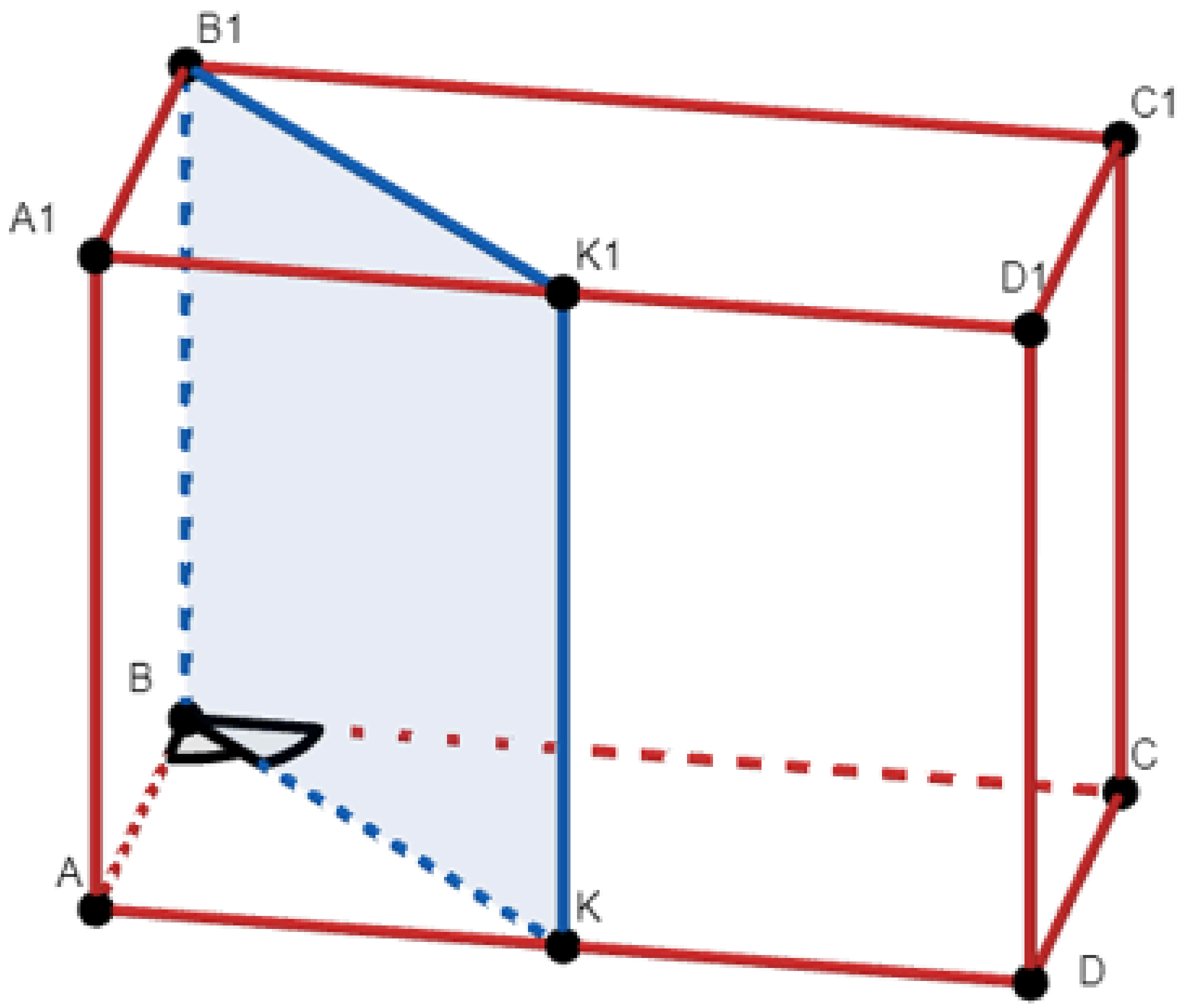

Рис. 10

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (рис. 10) Побудуємо бісектрису BK кута ABC. Отже,BKB_1K_1 – переріз площу якого треба знайти.$\angle ABK = \angle KBC = 45°$, бо $ABCD$ – прямокутник і відповідно $\angle B = 90°$. Нехай $a = AB, l = BB_1$, тоді $a \cdot l = Q$ за умовою. З ΔABK ($\angle A = 90°$). $BK = \frac{AB}{\cos \angle ABK} = \frac{a}{\cos 45°} = a\sqrt{2}$. Тоді $S_{BB1K1K} = BK \cdot BB_1 = a\sqrt{2} \cdot l = a\sqrt{2} \cdot \frac{Q}{a} = Q\sqrt{2}$.

Геометрія 11 клас (Апостолова)

Задача 30. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину ребер A_1D_1, D_1D і вершину B_1 провели площину. Визначте площу утвореного перерізу, якщо довжина ребра куба дорівнює $4\sqrt{5}$ м.

Розв’язання:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (рис. 11); M і N – середини A_1D_1 і D_1D відповідно. Через точки M, N і B проведемо площину. Ребро куба $a = 4\sqrt{5}$ см. Площина перерізу перетинає паралельні площини (ADD_1) і (BCC_1) по паралельних прямих. M і N – середини A_1D_1 і D_1D, отже MN – середня лінія ΔA_1D_1D, $MN \parallel A_1D$; $B_1C \parallel A_1D$ за властивістю куба, отже, $MN \parallel B_1C$, тоді B_1C – пряма перетину (BC_1C) і площини перерізу.

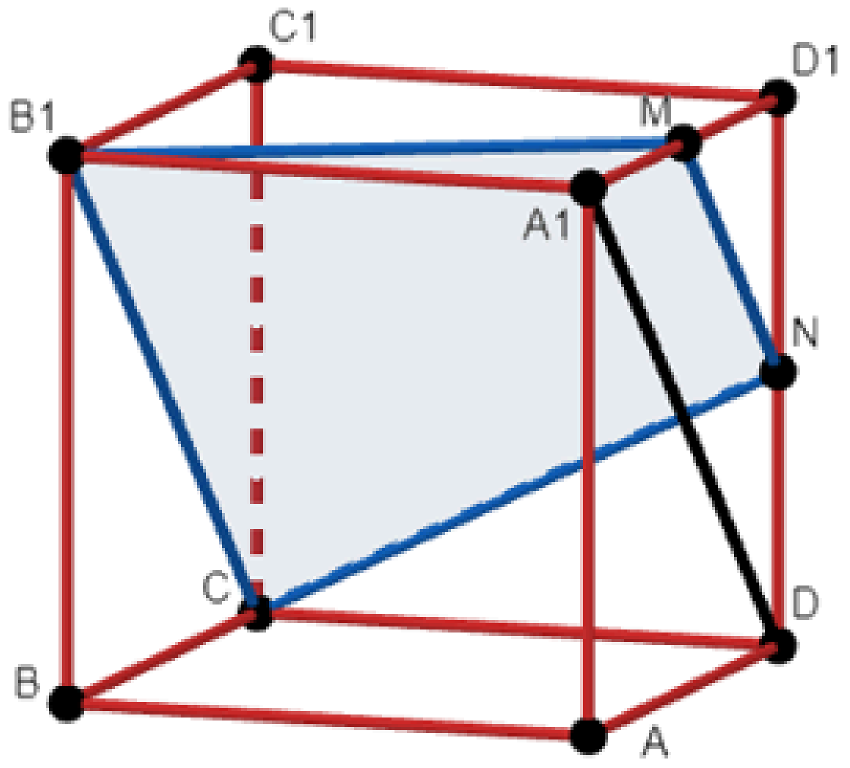

Рис. 2.1.6

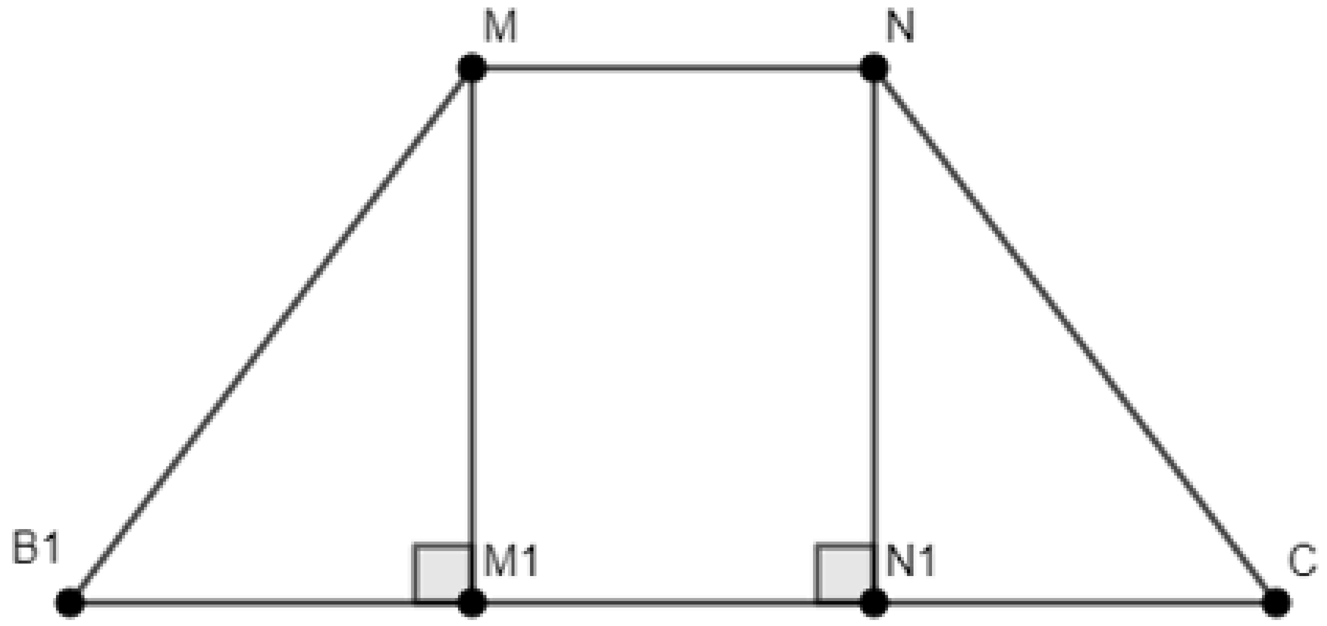

Рис. 2.1.7

Геометрія 11 клас (Апостолова)

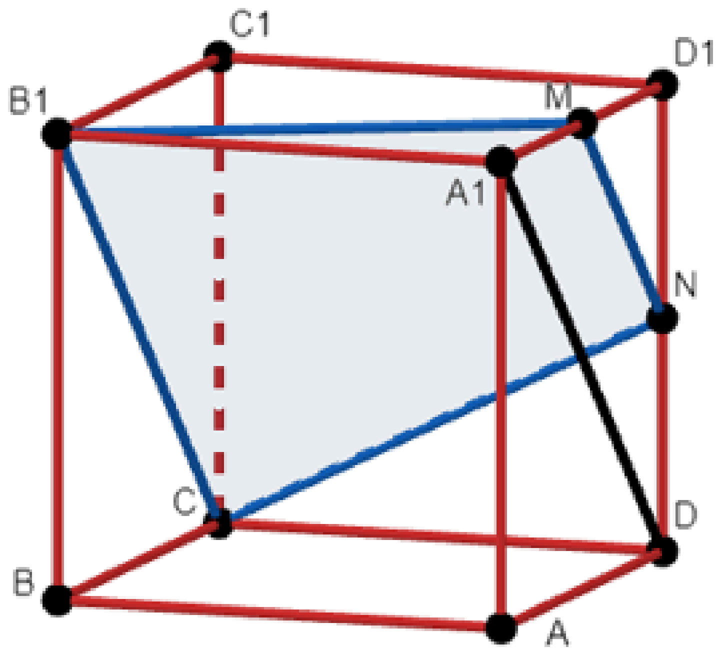

Рис. 2.1.6

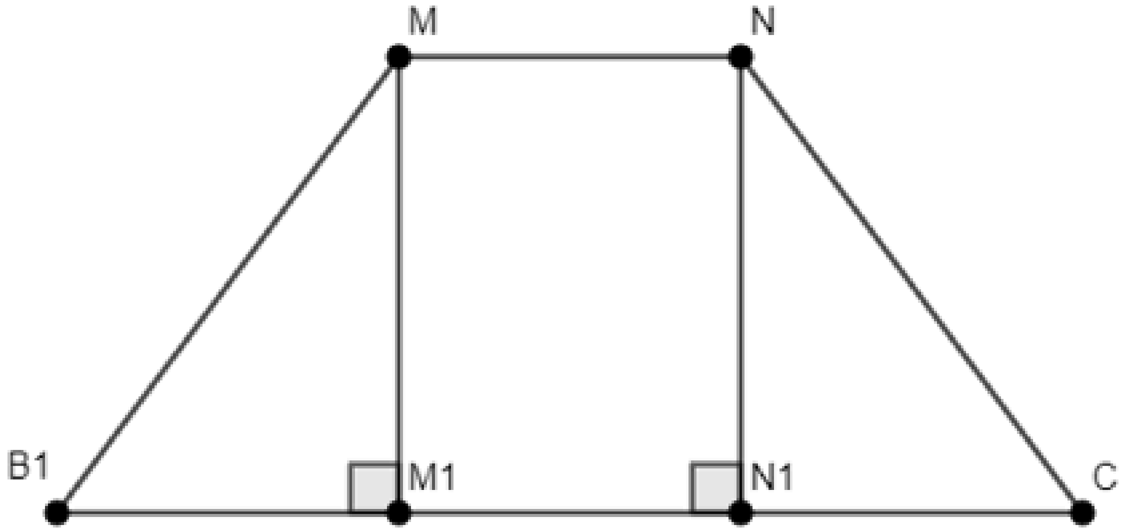

Рис. 2.1.7

Маємо $MNCB_1$ – утворений переріз(рис. 12) – рівнобічна трапеція ($BM = CN$ як гіпотенузи рівних прямокутних трикутників B_1A_1M і CDN) з основами $MN \parallel B_1C$, $MN = \frac{1}{2}B_1C$. $B_1C = a\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$ (см); $MN = 2\sqrt{10}$ (см).

З ΔB_1A_1M: $\angle A_1 = 90°$; $B_1A_1 = a$. $A_1M = \frac{1}{2}a$; $B_1M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $B_1M = CN = 10$ (см). Для трапеції $MNCB_1$: $MM_1 \perp CB_1$, MM_1 – висота; $B_1M = \frac{1}{2}(CB_1 - MN) = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}\right) = \sqrt{10}$ (см). У ΔB_1MM_1: $\angle M_1 = 90°$; За теоремою Піфагора $MM_1^2 = B_1M^2 - B_1M_1^2$; $MM_1^2 = 10^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2 = 90$; $MM_1 = 3\sqrt{10}$ см. $S_{MNCB_1} = \frac{CB_1 + MN}{2} \cdot MM_1 = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}\right) \cdot 3\sqrt{10} = 90$ (см)^2.

Список використанних джерел

1. Швець В.О. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: навч. посіб. / В.О. Швець, А.В. Прус - Житомир: Видавництво ЖДУ ім. І. Франка, 2007. - 156 с.
2. Бевз Г.П. Геометрія : підруч. для 10-11 кл. загальноосвітніх навч. закладів. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. - К. : Вежа, 2004. - 224 с
3. Муранова Н. П. Стереометрія. Особливості побудови перерізів багатогранників / Н. П. Муранова, М. М. Логвин // Методика викладання навчальних дисциплін в контексті підготовки до ЗНО : V Міжрегіонал. семінар, 23 квіт. 2010 р., м. Київ : матер. семінару. – К. : НАУ, 2011. – С. 120–135.
4. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач. / Г.П. Бевз - К.: Радянська школа, 1988. - 190 с.
5. Погорелое О.В. Геометрія. Стереометрія: підруч. для 10-11 кл. серед, шк. - 6-е вид. — К. : Освіта, 2001.- 128с.
6. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2020: навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін. – Слов'янськ: вид. центр «Маторін», 2021. – 94 с. – (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 27).
7.. Геометрія : 11 кл. : підруч. для загальноосвітніх навч. закл.:академ. рівень, профіл. рівень / Г.В. Апостолова; упорядкував. завдань: Ліпчевського Л.В. [та ін.]. – К. : Генеза, 2011. – 304 с.
8. Геометрія : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. – Київ : Генеза, 2019. – 288 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!!