**Тотожні перетворення цілих раціональних виразів. Цілі раціональні рівняння. Цілі раціональні нерівності**

**ПЛАН**

**1. Тотожні перетворення цілих раціональних виразів……………………3**

**2. Цілі раціональні рівняння…………………………………………………9**

**3. Цілі раціональні нерівності……………………………………………….26**

**4. Список використаної літератури…………………………………………39**

**1. Тотожні перетворення цілих раціональних виразів**

*Означення 1.* Заміна деякого виразу, вірніше його аналітичного вигляду, іншим тотожно рівним йому на деякій множині називають ***тотожним перетворенням*** деякого виразу на цій множині.

Під час тотожного перетворення виразу можлива зміна його області визначення.

Область визначення виразу може змінитися:

а) після скорочення дробу;

б) після зведення подібних.

*Означення 2.* Алгебраїчний вираз називають ***раціональним***, якщо він містить тільки операції: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до цілого степеня.

*Означення 3.* Раціональний вираз називається ***цілим***, якщо він не містить ділення на вираз зі змінними.

Під час виконання тотожних перетворень виразів дуже часто доцільно скористатися розкладанням многочлена на множники, при цьому використовують такі прийоми:

а) винесення спільного множника за дужки;

б) групування;

в) використання формул скороченого множення:

,

,

,

,

,

,

, тощо.

Розглянемо детально розкладання многочлена від однієї змінної на множники.

Якщо не має ніяких зауважень, то деякий многочлен змінної будемо розглядати виключно над полем дійсних чисел R.

Загальний вигляд многочлена над полем R має вигляд

де .

Розкладання многочлена на множники рівносильне знаходженню коренів многочлена.

Знаходження коренів многочлена саме по собі є достатньо складним завданням і, в загальному випадку, для многочлена -го степеня з дійсними коефіцієнтами не можна зазначити універсального способу знаходження коренів.

Проте для многочленів з цілими коефіцієнтами існує теорема, яка дозволяє відшукати раціональні корені таких многочленів.

Ірраціональні корені таких многочленів практично відшукати не можливо.

Нехай всі коефіцієнти многочлена є цілими числами, при чому старший коефіцієнт дорівнює 1, тобто многочлен має вигляд

Якщо такий многочлен має своїм коренем раціональне число, то це число ціле і його необхідно шукати серед дільників вільного члена .

Нехай всі коефіцієнти многочлена цілі числа, при чому старший коефіцієнт не дорівнює 1, тобто многочлен має вигляд

Якщо такий многочлен має своїм коренем раціональне число, то це число є нескоротним дробом, виду , при чому ділить та ділити .

Якщо є коренем деякого многочлена , то ділиться без остачі на двочлен

Многочлен над полем R є незвідним, тоді і тільки тоді, якщо він є многочленом першого степеня або многочленом другого степеня, у якого

Будь-який многочлен над полем R додатного степеня можна представити у вигляді добутку відмінного від нуля дійсного числа та незвідних над полем R многочленів зі старшими коефіцієнтами, що дорівнюють 1, тобто

де дискримінанти квадратних 3-членів від’ємні де .

Розкладання квадратного 3-члена на множники:

При

При многочлен є незвідним над полем дійсних чисел R.

*Приклад 1.* Розкласти многочлен на множники

*Розв’язання*

Отже,

*Приклад 2.* Розкласти многочлен на множники

*Розв’язання*

У даного многочлена всі коефіцієнти цілі, при чому старший коефіцієнт дорівнює 1. Його коренями над полем R можуть бути як раціональні так і ірраціональні числа. Ірраціональні корені практично віднайти не можливо, якщо вони є.

Раціональні корені, якщо вони є можуть бути тільки цілими числами, які будемо шукати серед дільників вільного члена, тобто серед чисел

Скористаємося схемою Горнера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -6 | 11 | -6 |
| 1 | 1 | -5 | 6 | 0 |
| 2 | 1 | -3 | 0 |  |
| 3 | 1 | 0 |  |  |

Отже,

*Приклад 3.* Розкласти многочлен на множники

*Розв’язання*

Спробуємо відшукати його раціональні корені. Оскільки його старший коефіцієнт дорівнює 4 і не дорівнює 1, то корені будемо шукати серед дробів:

Скористаємося схемою Горнера:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 4 | 0 | -7 | -5 | -1 |
|  | 4 | -2 | -6 | -2 | 0 |
|  | 4 | -4 | -4 | 0 |  |

Випишемо окремо многочлен, який отримався та розкладемо на множники

Отже,

*Приклад 4.* Довести тотожність

.

*Розв’язання.*

Маємо:

і .

**Завдання**

Розкласти многочлен на множники:

1. (Многочлен незвідний над R);

2.

3.

4.

5. (Многочлен незвідний над R);

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

Довести тотожності:

1. (Тотожність вірна);

2. (Тотожність вірна);

3. (Тотожність вірна);

4. (Тотожність вірна).

Спростити вирази:

1.

2.

3.

**2. Цілі раціональні рівняння**

В математичній науці існує кілька підходів до означення поняття «рівняння», залежно від того через, які поняття воно трактується:

* через вираз;
* через функцію;
* через предикат.

*Означення 1.*Рівнянням з однією змінною (з одним невідомим ) називається рівність двох виразів та , що визначені відповідно на множинах і для, якої поставлені завдання відшукати множину всіх значень з множини , яка буде підмножиною

,

таких, що вирази та мають однакові значення.

*Означення 2.* Рівнянням з однією змінною (з одним невідомим ) називається рівність двох аналітично заданих функцій та з областями визначення та та областями зміни та , де , для якої поставлено завдання відшукати всі значення з множини

такі, що обидві функції та мають однакові числові значення.

*Означення 3.* Предикат з множиною визначення , для якого ставиться завдання знайти множину істинності називається рівнянням з однією змінною (з одним невідомим ).

*Зауваження 1.* Аналогічно визначають і поняття рівняння з кількома змінними, тільки вирази функцій предикати у цьому випадку слід розглядати з кількома змінними (невідомими).

*Означення 4.* Коренем рівняння називається число (значення змінної або невідомої), для якого рівняння перетворюється у правильну рівність (тотожність).

Розв’язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів не має.

Два рівняння називаються рівносильними (еквівалентними), якщо множини їх коренів співпадають (тобто корені одного рівняння є коренями іншого і навпаки), зокрема, якщо обидва рівняння не мають коренів.

Під час розв’язання рівняння, зазвичай використовують різні перетворення, в результаті яких рівняння зводяться до більш простішого рівняння або системи , або сукупності рівнянь.

В результаті таких перетворень можна:

а) втратити корінь;

б) отримати сторонній корінь.

В деяких випадках втрачені корені не завжди можна повернути, а в деяких випадках, не всі сторонні корені можна відкинути.

З огляду на це під час спрощення висхідного рівняння доцільно виконувати тільки рівносильні перетворення.

*Теорема 1.* Якщо до обох частин рівняння додати один і той самий вираз , який визначений для всіх з області визначення рівняння, то отримаємо рівняння

рівносильне даному.

*Теорема 2.* Якщо обидві частини рівняння помножити чи поділити на один і той самий вираз , який визначений для будь-якого з області визначення даного рівняння і ніде в цій області визначення не дорівнює нулю, то отримаємо рівняння

( або )

рівносильне даному.

*Означення 5.* Рівняння з однією невідомою називається цілим алгебраїчним, якщо його обидві частини є цілими алгебраїчними виразами відносно невідомої (над невідомими у рівнянні вказані дії алгебраїчного додавання, віднімання, множення, зведення в натуральний степінь).

Будь-яке ціле алгебраїчне рівняння можна записати в загальному вигляді:

де - задані числа (коефіцієнти рівняння), а – невідоме.

*Означення 6.*Рівняння виду

називають рівнянням першого степеня або лінійним рівнянням з однією невідомою.

Розв’яжемо це рівняння. Перенесемо вільний член рівняння в праву частину; отримаємо

Оскільки , то обидві частини даного рівняння можна розділити на , після чого отримаємо

Так як ділення дійсних чисел однозначне, то рівняння має лише один розв’язок.

Зауважимо, що дане рівняння розглядають і при . Тоді, якщо і , то рівняння набуває вигляду

і має нескінчену множину розв’язків. Якщо і , то рівняння набуває вигляду

тобто при будь-якому дійсному значенні рівняння невірне. В цьому випадку кажуть, що рівняння розв’язку не має.

*Означення 7.*Рівняння виду

називається рівнянням другого степеня або квадратним рівнянням з однією невідомою.

Квадратне рівняння називається неповним, якщо хоча б один з його коефіцієнтів, окрім старшого (), дорівнює нулю.

Неповні квадратні рівняння бувають наступних видів:

а) якщо , то рівняння приймає вигляд

звідки знаходимо і ;

б) якщо , то рівняння приймає вигляд

звідки знаходимо

Якщо , то , і рівняння в області дійсних чисел має розв’язок або при і при . Якщо , то рівняння дійсних розв’язків не має;

в) якщо , то рівняння приймає вигляд

або

звідки знаходимо ,

Якщо всі коефіцієнти квадратного рівняння відмінні від нуля, то його називають повним. Якщо коефіцієнт при рівний 1, то квадратне рівняння називають зведеним і при цьому позначають тобто рівняння записують так:

Формули коренів квадратного рівняння виводяться наступним чином:

множимо обидві частини рівняння на , отримаємо

В лівій частині отриманого рівняння виділимо повний квадрат

або

Вираз називається дискримінантом квадратного рівняння.

Якщо то з обох частин останнього рівняння можна виділити арифметичний квадратний корінь. Тоді отримаємо

а) Якщо то

б) Якщо то

Таким чином, якщо то квадратне рівняння має два дійсних корені, які визначаються за формулою

В частинних випадках, якщо тобто для рівняння

формула приймає вигляд

Якщо рівняння зведене, тобто має вигляд то для визначення його коренів в формулу слід підставити тоді отримаємо

*Теорема Вієта* (властивості коренів квадратного рівняння).

1. Сума коренів квадратного рівняння дорівнює частці від ділення другого коефіцієнта на перший з протилежним знаком, тобто
2. Добуток коренів квадратного рівняння дорівнює частці від ділення вільного члена на перший коефіцієнт, тобто

Вираз при називається квадратним тричленом.

Вираз називається дискримінантом квадратного тричлену.

Якщо то квадратний тричлен розкладається на множники з дійсними коефіцієнтами

де корені квадратного тричлена.

*Означення 8.*Рівняння виду

називається біквадратним.

Замінивши на t, отримаємо рівняння з якого знаходимо

Якщо і то біквадратне рівняння має чотири дійсних кореня

*Приклад 1.* Знайти корені рівняння

*Розв’язання*

Рівняння – біквадратне. Тому вводимо заміну

Якщо то

Якщо то

*Відповідь:*

*Приклад 2.* Розв’язати рівняння

*Розв’язання*

В лівій частині рівняння виділимо повний квадрат, отримаємо:

або

Позначимо , тоді відносно рівняння приймає вигляд , звідки слідує

Якщо , то звідки знаходимо

Якщо *,* то звідки знаходимо

*Відповідь:*

*Означення 9.*Рівняння виду

називається симетричним (зворотнім) тоді і тільки тоді, коли виконується умова

Симетричні рівняння можуть бути як парного так і непарного степеня.

Симетричне рівняння має властивість: також є коренем рівняння.

Жодне з симетричних рівнянь не може мати коренем 0.

Симетричні рівняння парного степеня: нехай тоді обидві частини рівняння ділимо на а потім виконується підстановка

Початкове рівняння зводиться до рівняння степеня

*Приклад 3.* Розв’язати рівняння

*Розв’язання*

– це симетричне рівняння 4-го степеня. Нехай ділимо на обидві частини рівняння, отримаємо:

Згрупуємо:

Виконаємо підстановку: нехай тоді

Якщо то

Якщо то

*Відповідь:*

Якщо симетричне рівняння непарного степеня то таке рівняння обов’язково матиме корінь (переконатися можна безпосередньо перевіркою). Потім шляхом поділу обох частин рівняння на двочлен зводимо це рівняння до симетричного рівняння степені .

*Приклад 4.* Розв’язати рівняння

*Розв’язання*

Це симетричне рівняння 7-го степеня. Воно обов’язково матиме корінь Поділимо обидві частини рівняння на

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | -5 | -13 | -13 | -5 | 2 | 1 |
| -1 | 1 | 1 | -6 | -7 | -6 | 1 | 1 | 0 |

В результаті такого поділу отримаємо:

Нехай ділимо на обидві частини рівняння:

Згрупуємо:

Нехай

Згрупуємо:

або

або

або

Отже,

Якщо , то

Якщо , то

Якщо , то

*Відповідь:*

*Означення 10.* Якщо для рівняння

виконується умова , то рівняння називають кососиметричним.

Для кососиметричного рівняння першого степеня виконується підстановка .

Для кососиметричного рівняння непарного степеня є обов’язковим коренем . Шляхом поділу обох частин рівняння на зводимо дане рівняння до кососиметричного рівняння парного степеня.

*Приклад 5.* Розв’язати рівняння

*Розв’язання*

Це кососиметричне рівняння 5-го степеня. Воно обов’язково матиме корінь Поділимо обидві частини рівняння на

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 15 | 34 | 15 | -15 | -34 | -15 |
| 1 | 15 | 49 | 64 | 49 | 15 | 0 |

В результаті такого поділу отримаємо:

Нехай ділимо на обидві частини рівняння:

Нехай

Якщо , то

Якщо , то

*Відповідь:*

Якщо для рівняння 4-го степеня

виконується умова

то таке рівняння розв’язується шляхом поділу обох частин рівняння на .

*Приклад 6.* Розв’язати рівняння

*Розв’язання*

Це рівняння 4-го степеня, де:

Для цього рівняння виконується умова

Поділимо обидві частини рівняння на :

Виконаємо підстановку

Якщо , то

Якщо , то

*Відповідь:*

Якщо для рівняння 4-го степеня

виконується умова

то рівняння доцільно розв’язувати групуючи множники лівої частини рівняння.

*Приклад 7.* Розв’язати рівняння

*Розв’язання*

Це рівняння 4-го степеня, де:

Для цього рівняння виконується умова

Згрупуємо

Нехай .

Якщо то

Якщо то

*Відповідь: .*

**Завдання**

Розв’язати рівняння:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18. ,

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

**3. Цілі раціональні нерівності з однією змінною. Метод інтервалів**

*Означення 1.* Нерівності вигляду або , де – лінійні функції, називаються нерівностями першого степеня або лінійними нерівностями з одним невідомим.

*Означення 2.* Областю визначення нерівності називається множина всіх таких значень , при яких і вираз , і вираз визначені. Іншими словами, область визначення нерівності – це перетин областей визначення виразів та .

*Означення 3.*Частинним розв’язком нерівності називається будь-яке значення змінної, яке її задовольняє.

*Означення 4.* Розв’язком нерівності називається множина всіх її частинних розв’язків.

*Означення 5.* Дві нерівності з однією змінною називаються рівносильними, якщо їхні розв’язки збігаються.

*Теорема 1.* Якщо до обох частин нерівності додати один і той самий вираз , який визначений при всіх значення з області визначення початкової нерівності, і при цьому залишити знак нерівності без змін, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Таким чином, нерівності

і

або

і

рівносильні, якщо задовольняє умові теореми.

*Наслідок 1.* Нерівності

і

рівносильні.

*Теорема 2.* Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на один і той же вираз , який при всіх з області визначення початкової нерівності приймає лише додатні значення, і при цьому залишити знак нерівності без змін, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Таким чином, якщо , то нерівності

і

або

і

рівносильні.

*Наслідок 2.* Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на одне й те ж невід’ємне число, зберігши знак нерівності, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

*Теорема 3.* Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на один і той же вираз , який при всіх з області визначення початкової нерівності приймає лише від’ємні значення, і при цьому знак нерівності змінити на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Таким чином, якщо , то нерівності

і

або

і

рівносильні.

*Наслідок 3.* Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на одне й те ж від’ємне число, змінивши знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Будь-яку лінійну нерівність можна подати у вигляді

(1)

Алгоритм розв’язку нерівності :

а) якщо , то за наслідком 2, після, того як помножимо обидві частини нерівності на , отримаємо рівносильну даній нерівність , із якої випливає, що

б) якщо , то за наслідком 3, після, того як помножимо обидві частини нерівності на , отримаємо рівносильну даній нерівність , із якої випливає, що

в) якщо , то при для будь-якого дійсного значення нерівність перетворюється в неправильну і розв’язку не має, а при дана нерівність справджується при всіх дійсних значеннях , тобто всі дійсні числа є розв’язками нерівності.

*Зауваження 1.* Нерівність можна представити у вигляді , помноживши обидві її частини на .

Розглянемо двочлен

Знайдемо корені або нулі двочлена (значення , при яких ):

Подамо двочлен у вигляді

при двочлен буде невід’ємним, якщо (тобто при ), і від’ємним, якщо (тобто при ).

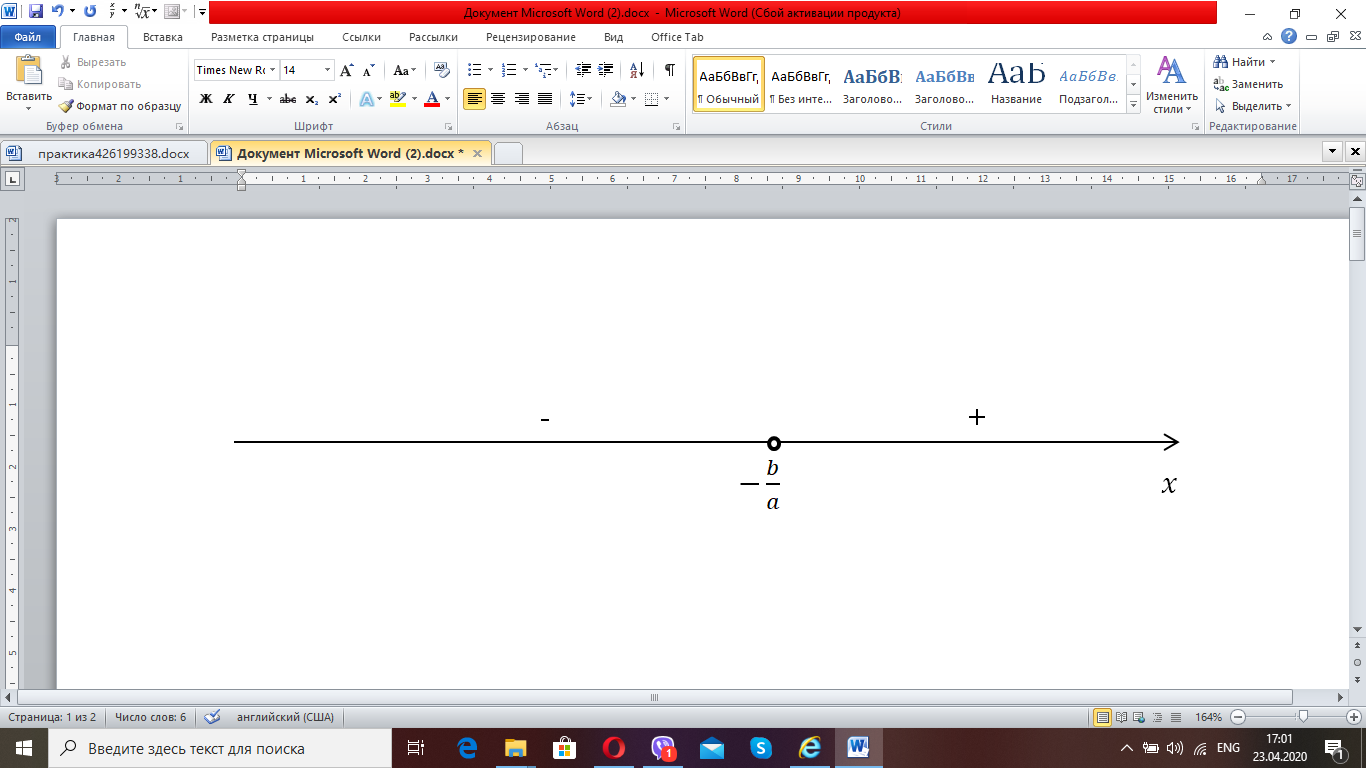


Рис. 1

*Висновок.* Якщо , то двочлен невід’ємний при значеннях , більших за корінь і від’ємний при значеннях , менших за корінь (при - навпаки).

Геометрично це означає, що при двочлен невід’ємний зправа і від’ємний зліва від свого кореня (рис. 1).

*Означення 6.* Нерівності виду

або (2)

називаються нерівностями другого степеня з однією змінною.

Алгоритм розв’язку нерівності при :

а) якщо , то за наслідком 2, після, того як помножимо обидві частини нерівності на , отримаємо рівносильну даній нерівність

або

де (3)

б) якщо , то за наслідком 3, після, того як помножимо обидві частини нерівності на , отримаємо рівносильну даній

або

(4)

*Зауваження 2.* Аналогічно можна подати нерівність

до (3) або (4).

Розглянемо тричлен

1. Якщо , то тричлен можна розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами

де та – корені тричлена .

Якщо , то та ; тоді .

Якщо , то та ; тоді .

Якщо , то та ; тоді .

Рис. 2

*Висновок.* Якщо , то квадратний тричлен невід’ємний при значеннях менших за менший корінь та більших за більший корінь, і від’ємний при значеннях , які лежать між коренями (рис. 2).

2. Якщо , то тричлен приймає вигляд

і при всіх буде невід’ємним, а при рівний нулю.

3. Якщо , то тричлен можна подати у вигляді

Так як при всіх , а ,то тричлен невід’ємний при всіх значеннях .

*Правило.* Для того, що розв’язати квадратну нерівність

або

можна тричлен розкласти на множники, коренями цих множників розбити всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана, визначити знак тричлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному з проміжків (рис.2) та об’єднати проміжки, на яких тричлен задовольняє множину розв’язків.

Якщо квадратний тричлен не розкладається на множники, то друга нерівність не має розв’язків; розв’язками першої нерівності будуть всі дійсні числа , якщо тричлен не має дійсних коренів; якщо тричлен має один дійсний корінь, то розв’язками будуть всі, за винятком цього кореня, дійсні числа.

*Означення 7.* Нерівність виду

(5)

(6)

називається цілою раціональною нерівністю -го степеня з одним невідомим.

Розглянемо загальний алгоритм розв’язку нерівності (5)

Многочлен

над полем дійсних чисел R завжди і єдиним способом можна представити у вигляді добутку деякого дійсного числа, що не дорівнює нулю, і незвідних над полем дійсних чисел R многочленів зі старшим коефіцієнтом, який дорівнює 1, тобто

(7)

де

При чому квадратні тричлени мають

Незвідними над полем R є многочлени 1-го степеня і многочлени 2-го степеня з від’ємним дискримінантом.

Нерівність (5) можна подати у вигляді

яка рівносильна нерівності

(8)

Множники лівої частини нерівності з непарними показниками степеня можна лишити в першому степені, а з парними – опустити, виписавши ті значення , за яких вони перетворюються в нуль. Тоді нерівність матиме вигляд

при вона рівносильна нерівності

(9)

при вона рівносильна нерівності

(10)

*Правило.* Щоб знайти розв’язок нерівності (9) або (10) потрібно:

1. Знайти корені многочлена записаного в лівій частині нерівності.

2. Знайденими коренями розбити всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана.

3. Визначити знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному з проміжків.

4. Об’єднати проміжки, на яких многочлен задовольняє множину розв’язків.

*Зауваження 3.* Аналогічно можна розв’язати нерівність (6).

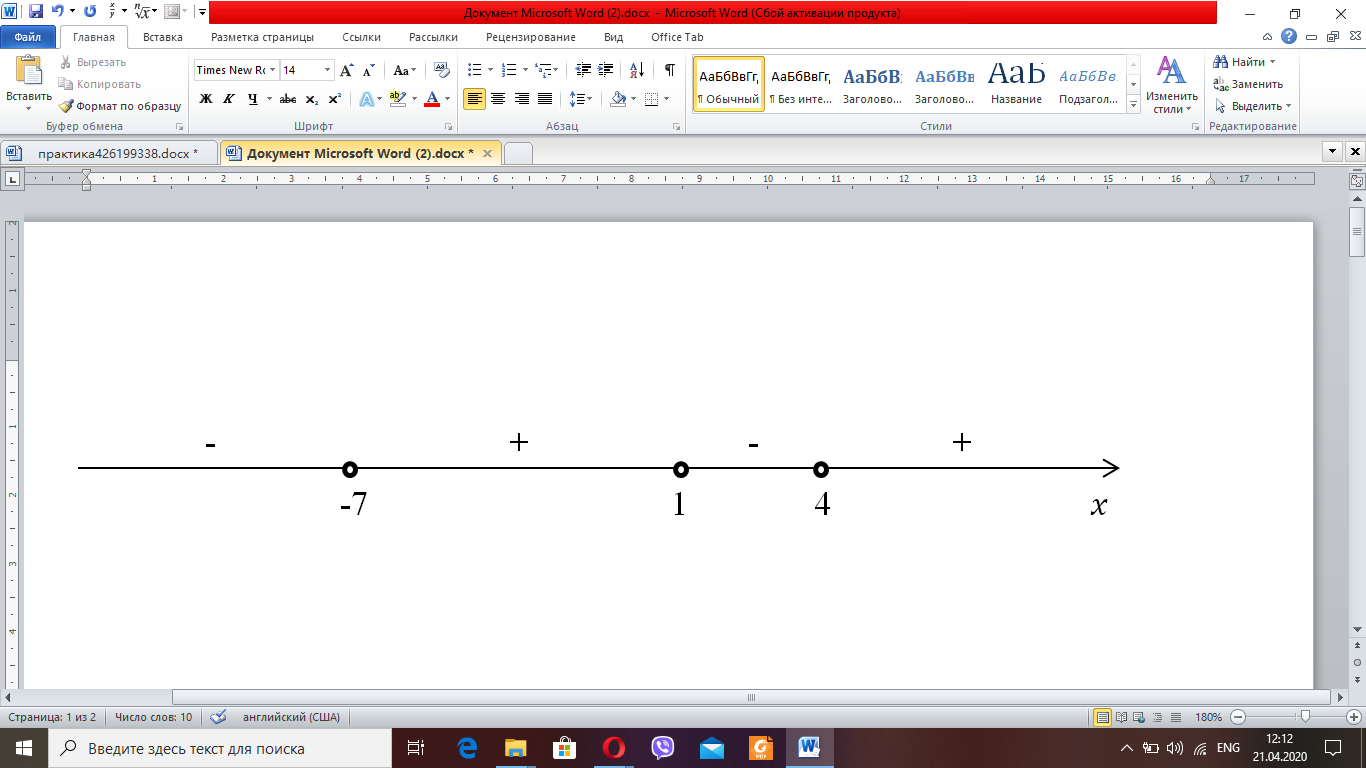
*Зауваження 4.* Даний алгоритм розв’язку нерівностей називається методом інтервалів (геометричний метод розв’язку нерівностей).

*Приклад 1.* Розв’язати нерівність

*Розв’язання.*

1. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

2. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

Рис. 3

3. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 3).

4. Запишемо відповідь:

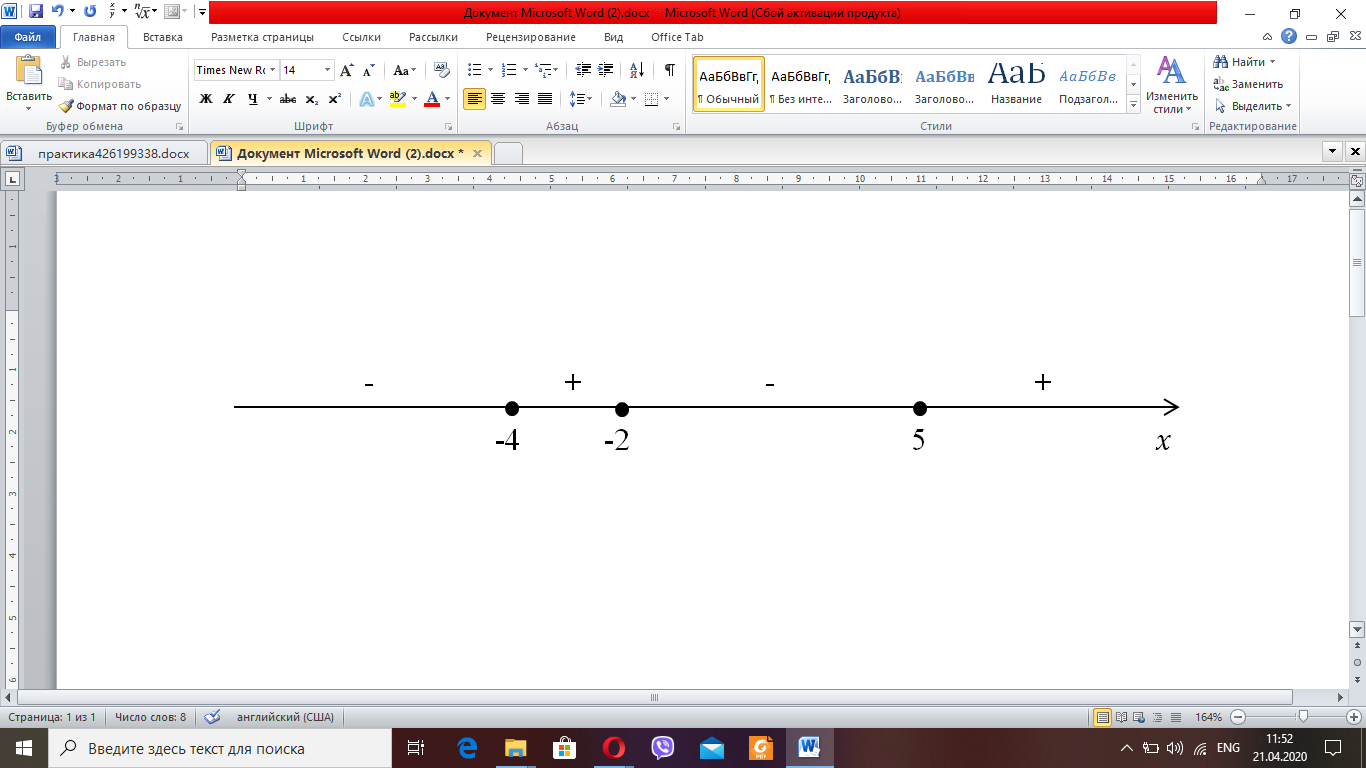
*Приклад 2.* Розв’язати нерівність

*Розв’язання.*

1. Дана нерівність еквівалентна нерівності

2. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

3. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

Рис. 4

4. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 4).

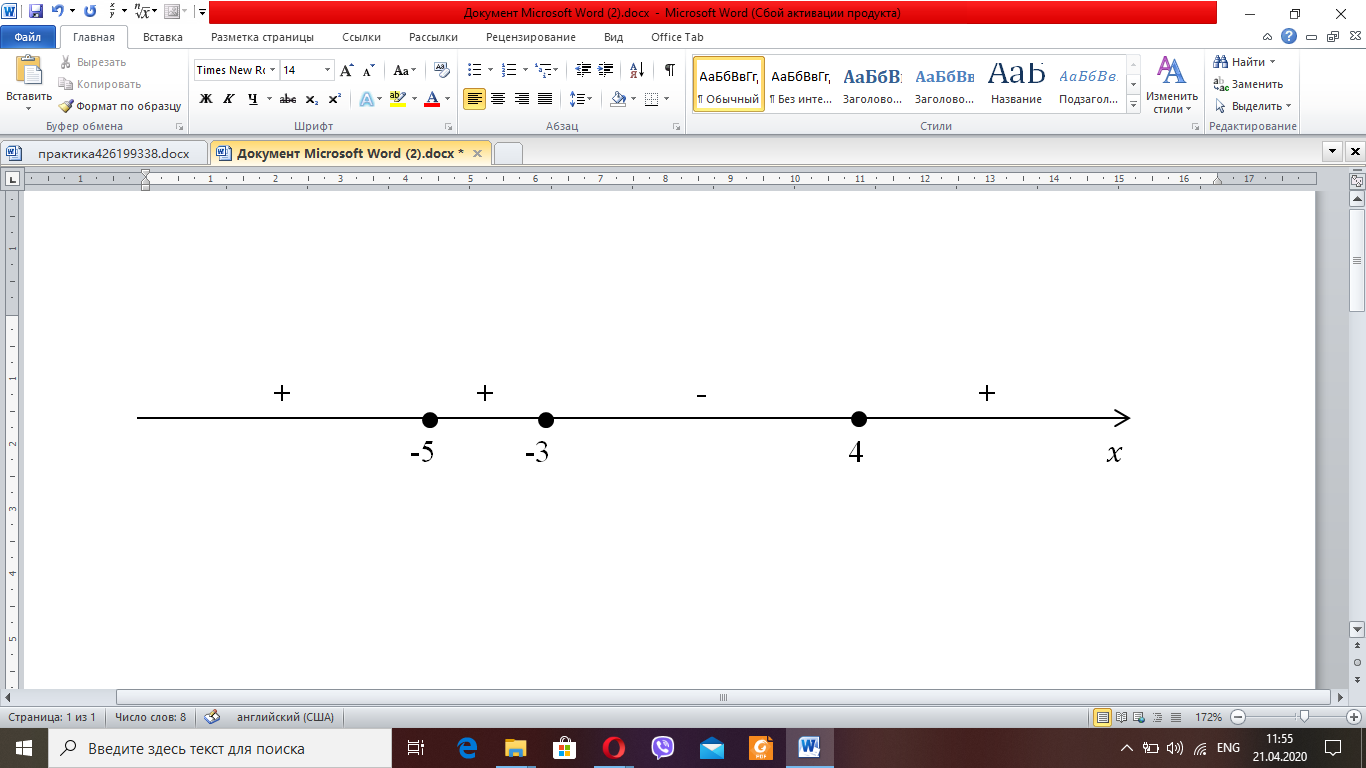
5. Відповідь:

*Приклад 3.* Розв’язати нерівність

*Розв’язання.*

1. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

2. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

Рис. 5

3. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 5).

4. Відповідь:

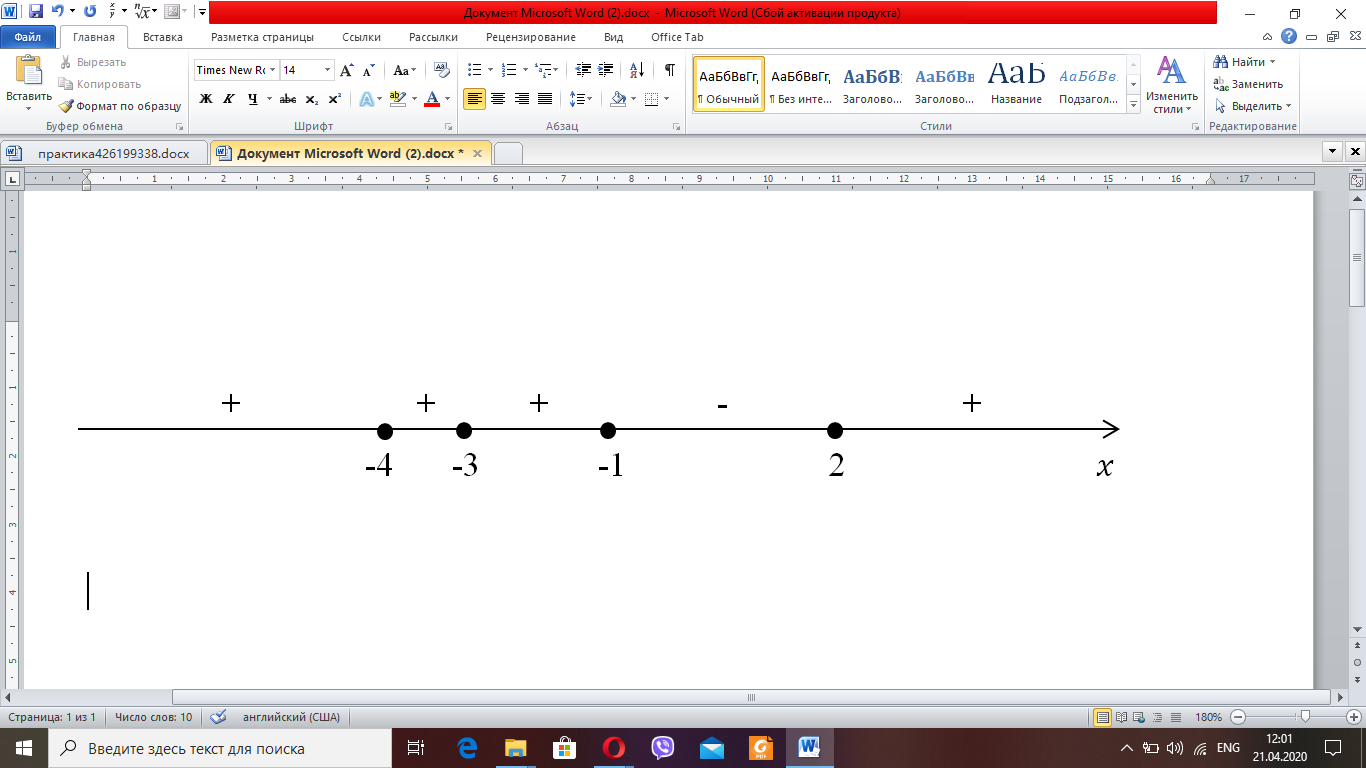
*Приклад 4.* Розв’язати нерівність

*Розв’язання.*

1. Дана нерівність еквівалентна нерівності

2. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

3. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

Рис. 6

4. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 6).

5. Відповідь:

*Приклад 5.* Розв’язати нерівність

*Розв’язання.*

1. Дана нерівність еквівалентна нерівності

2. Випишемо окремо квадратні тричлени та розкладемо їх на множники:

а)

Оскільки , то над полем R цей квадратний тричлен на множники не розкладається. Він на всій числовій прямій одного знаку (рис.7)

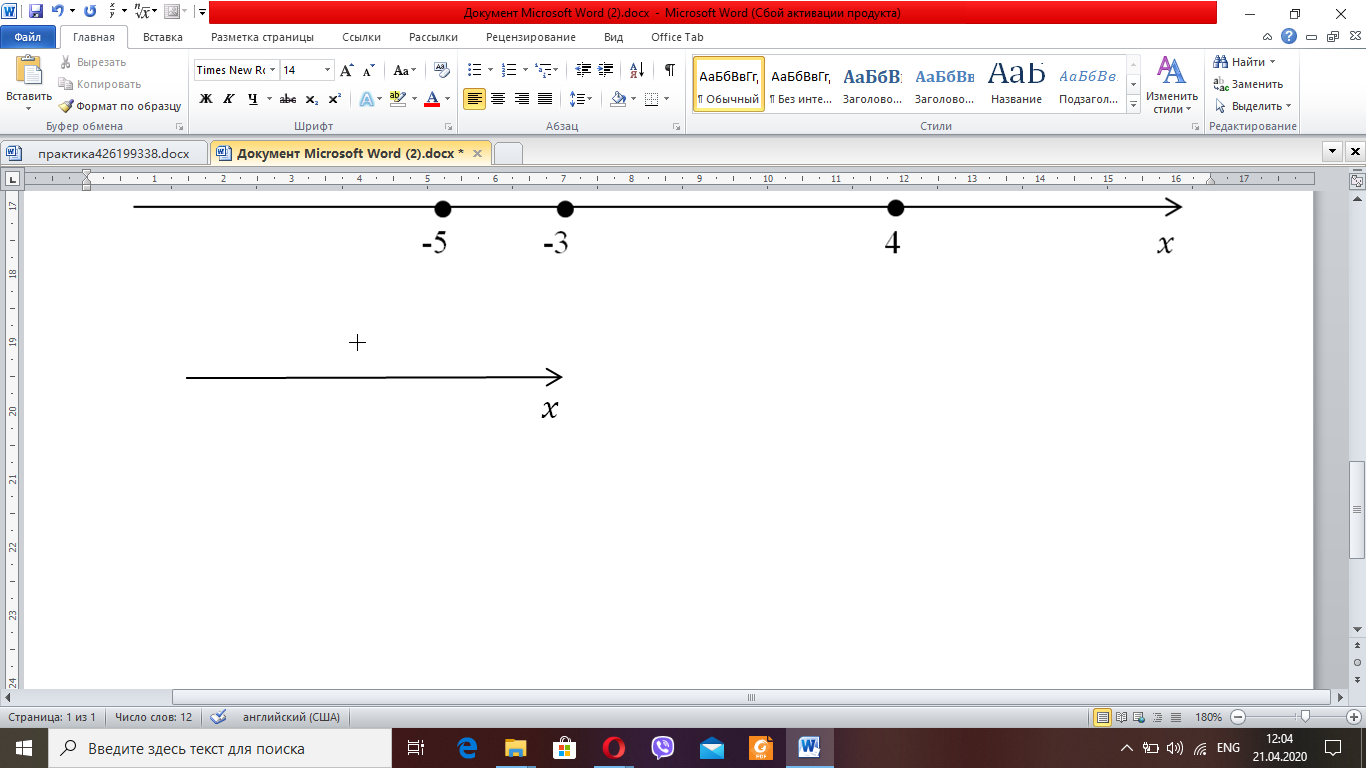


Рис.7

б)

3.

4. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

5. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

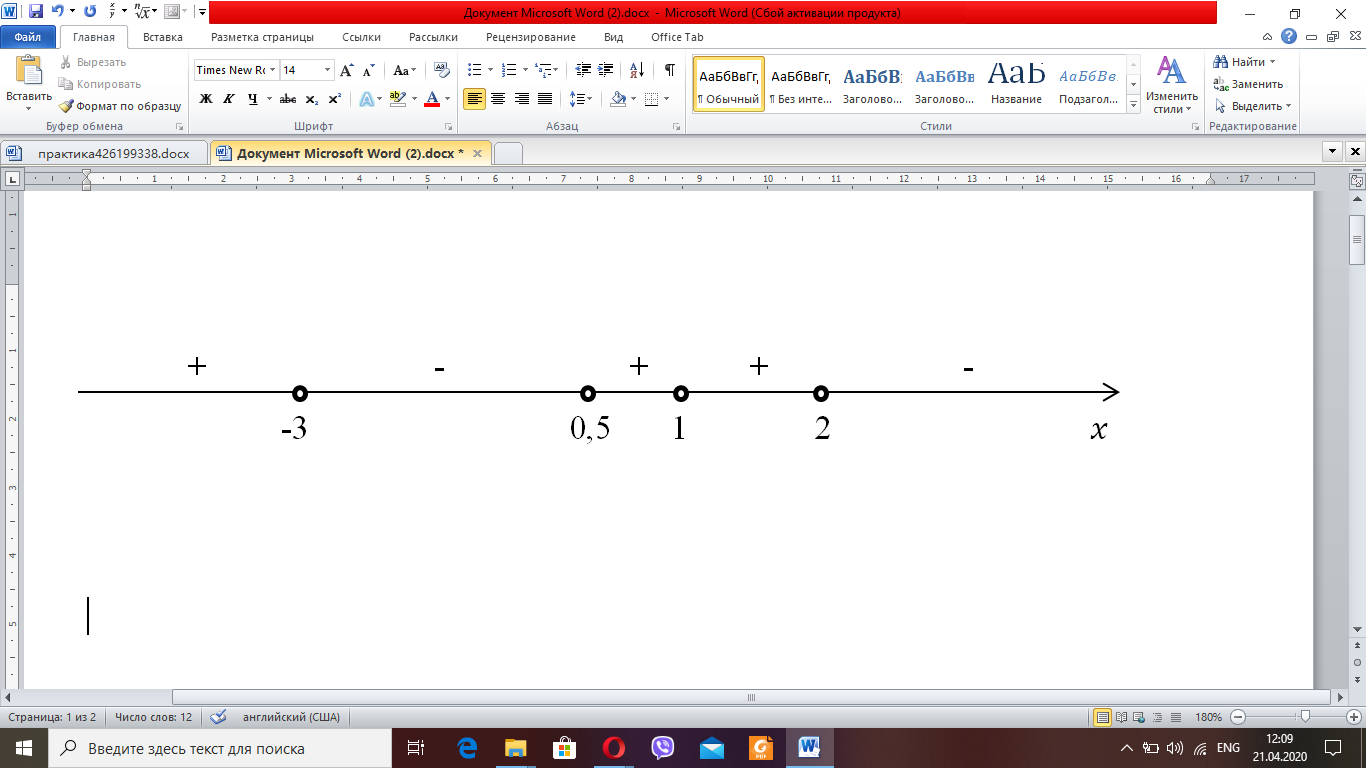


Рис. 8

6. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 8).

5. Відповідь:

**Завдання**

Розв’язати нерівності:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. Литвиненко, В.Н. Практикум по решению математических задач: учеб. пособие для пед. ин-тов по мат. спец. / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С., Полякова Т.Н. Практикум по решению математических задач: учеб. пособие для пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1979. – 240 с.

3. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: кн. для учащихся - М.: Просвещение, 1990. – 416 с.

Додаткова:

1. Кравчук В. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл./ В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. – Тернопіль, 2016. – 256 с.

2. Істер О.С. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Київ: Генеза, 2016. – 272 с.

3. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл./ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 240 с.