**«Тотожні перетворення показникових виразів»**

План

1. Показникові рівняння:

а) теоретичний матеріал;

б)приклади розв’язування задач;

в)задачі для самостійного розв’язування;

1. Показникові нерівності:

а) теоретичний матеріал;

б)приклади розв’язування задач;

в)задачі для самостійного розв’язування;

**Показникова функція**

Функція виду   називається показниковою.

Наприклад:

Побудуємо  для деяких цілих значень.

Тепер на цьому ж графіку добудуємо деякі дробові значення функції




Якщо побудуємо всі значення з множини  ,то отримаємо графік показникової функції  (можливий інший запис, наприклад:  ).

 \*Кожна точка цього графіка є степенем числа 2 з дійсним показником .

Чи існує функція при ?

 Існує, але це вже буде не показникова функція. Графіком такої функції є пряма.

 Чи може отриманий графік показникової функції перетнути вісь абсцис?

 Ні, навіть якщо ми візьмемо від’ємний показник степеня, то завжди отримаємо додатне значення

Отже, вісь **є асимптотою цього графіка.**

 \*Асимпто́та криво́ї (грец. — що не збігається, не дотикається) — це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.

 Проаналізуємо графіки показникової функції при



Що можемо сказати про ці функції на перший погляд?

(при  функція зростаюча, при функція спадна)

Побудуємо деякі графіки функцій  при  і

Чим більшою є основа , тим крутіше «піднімається» графік функції , якщо рухатися вправо.



 Чим меншою є основа , тим крутіше «піднімається» графік функції , якщо точка рухається вліво.

Пригадаємо властивості степеня з раціональним показником.

Всі ці властивості справедливі для  , та будь-яких дійсних

Властивості показникової функції

 (Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел)

  (Областю значень показникової функції є множина )

  при всіх значеннях  (Показникова функція немає нулів, і проміжок  є проміжком її знакосталості)

 При  зростаюча (При  зростає на всій області визначення)

При  спадна (При  спадає на всій області визначення)

 **Цікаво**

Розглянемо графіки показникових функцій  i .

У них кутовий коефіцієнт дотичної проведеної в точці  до графіка менший за одиницю або більший за одиницю.



 Чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в т. дорівнював 1?



Якщо за основу показникової функції взяти ірраціональне число

 Така показникова функція називається експонентою.

 Чому графік кожної показникової функції обов’язково проходить через точку ?

**Показникові рівняння**

Показниковими рівняннями називають рівняння, в яких невідоме міститься в показнику степеня при сталих основах і має вигляд: af(x)=ag(x), де a — додатне число, відмінне від 1, і рівняння, що зводяться до цього виду.

Саме просте показникове рівняння =b, a>0,a≠1 розв'язують логарифмуванням x=log[a](b).

Оскільки множина значень функції множина додатних чисел, то рівняння :

 1) має один корінь, якщо b>0;



2) не має коренів, якщо b≤0.



При розв'язуванні показникових рівнянь використовують властивість показників: якщо рівні вирази з однією і тією ж основою, то рівні показники степені, або основа дорівнює одиниці.
З рівності слідує x=y або a=1.

Означення: Число c називається n -тим степенем числа a якщо

|  |  |
| --- | --- |
| c = an = | a · a · ... · a |
| _ |
| n |

**Формули та властивості степенів** використовуються підчас операцій скорочення та спрощення складних виразів при розв'язанні рівнянь та нерівностей.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

Означення: Коренем n-того степеня із числа a називається таке число b, n-та степінь якого рівна a

Для a > 0 і b > 0 і натуральних чисел n, m, k виконуються наступні співвідношення:

1.
2.
3.
4. для довільних a і b, таких що 0 ≤ a ≤ b справедлива нерівність:

Означення: Логарифм числа b за основою a () визначається як показник степеня, до якого слід піднести число a, щоб отримати число b (логарифм існує лише для додатних чисел).
logab = x означає, що ax = b

***Види логарифмів***

 - логарифм числа b за основою a (a > 0, a ≠ 1, b > 0)

  - десятковий логарифм (логарифм за основою 10, a = 10).

 - натуральний логарифм (логарифм за основою e, a = e).

***Формули і властивості логарифмів***

1. - основна логарифмічна тотожність
2. - формула переходу до нової основи

Для довільних a; a > 0; a ≠ 1 і для довільних x; y > 0.

При розв'язанні показникових рівнянь застосовують властивості степенів з раціональними показниками:

1. якщо n=1, тоді =a;

2. якщо n=0 і a≠0, тоді =1;

 3. якщо n=2,3,4,5..., тоді =a⋅a⋅a⋅...⋅a (n множників);

 4. якщо n=1,2,3,4,... і a≠0, тоді =

Можна виділити три основні методи розв'язання показникових рівнянь

Функціонально-графічний метод

Метод заснований на використанні графічних ілюстрацій або будь-яких властивостей функцій.

В одній системі координат будуємо графіки функцій, записані в лівій і в правій частинах рівняння, потім, знаходимо точку (точки) їх перетину. Абсциса знайденої точки є розв'язком рівняння.

Приклад:

1. Розв'язати рівняння  =

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій  і

 Вони перетинаються в одній точці (1; 5). Перевірка показує, що насправді точка (1; 5) задовольняє і рівнянню, і рівнянню

Абсциса цієї точки служить єдиним коренем заданого рівняння,

оскільки — зростаюча функція, а  — спадна функція.

Отже, рівняння = має єдиний корінь .

Метод порівняння показників

Оскільки рівність , де

справедлива тоді і тільки тоді, коли , тоді вірне наступне твердження:

Показникове рівняння  (де ) рівносильне рівнянню

Приклад:

1. Розв'язати рівняння:

Представивши 64, як , перепишемо задане рівняння у вигляді

Це рівняння рівносильне рівнянню  , звідки знаходимо:

Метод введення нової змінної

Спосіб підстановки застосовується в більш складних прикладах. Він полягає в наступному.

 Показникове рівняння можна розв'язати, запровадивши нове позначення. Після підстановки у початкове рівняння нового позначення, отримаємо нове, більш просте рівняння, розв'язавши яке, повертаємося до підстановки і знаходимо корені початкового рівняння.
 Розглянемо спосіб підстановки на прикладах.

Приклад:

Розв'язати рівняння.

Заміною  дане рівняння зводиться до квадратного рівняння .

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо його корені:, звідки .

Рівняння  має корінь , а рівняння  не має коренів, оскільки показникова функція не може приймати від'ємні значення.

Узальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових рівнянь, відзначимо, що при   і  рівняння

   (2)

рівносильне рівнянню

  (3)

 Щоб обґрунтувати цю рівносильність, досить помітити, що рівності (2) і (3) можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція  є строго монотонною і кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу  (тобто з рівності степенів (2) обов'язково випливає рівність показників (3)).

Отже, усі корені рівняння (2) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (3), та навпаки, усі корені рівняння (3) будуть коренями рівняння (2).

А це й означає, що рівняння (2) і (3) рівносильні.

 Отже, у найпростіших випадках при розв'язуванні показникових рівнянь намагаються за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду .

 Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінної або властивості відповідних функцій.

Зауважимо, що всі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цього рівняння). Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень (ОДЗ) є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ явно не знаходять і не записують до розв'язання рівняння (див. нижче приклади). Але якщо в процесі розв'язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то в цьому випадку доводиться згадувати про ОДЗ .

**Приклади розв’язування рівнянь**

Якщо в лівій і правій частинах показникового рівняння стоять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допо­могою основних формул спробу­вати записати обидві частини рівняння як степені з однією ос­новою.

Приклад 1.

Розв'язати рівняння:

Розв'язання:

Відповідь.

Якщо в одній частині показни­кового рівняння стоїть число, а в іншій всі члени містять ви­раз виду  (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій части­ні рівняння винести за дужки найменший степінь а.

Приклад 2.

Розв'язати рівняння:

Розв'язання:

Відповідь 2.

Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій усі члени містять вираз виду  (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь .

Приклади розв’язування більш складніших показникових рівнянь

Позбавляємось числових доданків у показниках степенів (використовуючи справа наліво основні властивості [степенів](https://cubens.com/uk/numbers-and-equestions/power/)).

Якщо можливо, зводимо всі степені до однієї основи і виконуємо заміну змінних.

Приклад 3:

Розв’яжіть рівняння

Розв’язання:

Ураховуючи, що  , зводимо степені до однієї основи 2:

Заміна   дає рівняння:

Обернена заміна дає рівняння , звідки  або  - коренів немає.

Відповідь:

###  Приклад 4:

Розв’яжіть рівняння

Розв’язання:

Перепишемо рівняння в наступному вигляду

Другий доданок розпишемо, як добуток

та зробимо заміну у рівнянні

Вихідне рівняння перетвориться до наступного

Областю допустимих значень буде дійсна множина за винятком точки y=0.
Помножимо залежність на y та переносимо вільний член в ліву сторону

Отримали квадратне рівняння, корені якого знаходимо за теоремою Вієта. Не важко переконатися, що вони приймають значення

Повертаємося до заміни, та знаходимо розв'язки

 Виконуємо перевірку

 Отже обидва розв'язки x=1; x=3 задовольняють рівняння.

Якщо не можна звести степені до однієї основи, то пробуємо звести всі степені до двох основ так, щоб одержати [однорідне рівняння.](https://cubens.com/uk/equations-and-inequalities/equations-with-one-variable/)

Приклад 5:

Розв’яжіть рівняння .

Розв’язання:

Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3:

Маємо однорідне рівняння. Для його розв’язування поділимо обидві частини на

Заміна  дає рівняння:

Обернена заміна дає рівняння , звідки  або  - коренів немає.

Відповідь:

 В інших випадках переносимо всі члени рівняння в одну частину і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або застосовуємо спеціальні прийоми розв’язування, у яких використовуємо властивості відповідній функцій.

### Приклад 6:

### Розв’яжіть рівняння

Розв’язання:

Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержимо :

Виносимо за дужки спільний множник :

Тоді   або .

.

Одержуємо два рівняння 1), звідки  або 2) , звідки .

Відповідь:

**Рівняння для самостійного розв’язування**

1. Розв’яжіть графічно
2. 1) Запишіть у вигляді степеня з від’ємним показником
 2)Розв’яжіть рівняння
3.
4.
5. Розв’яжіть:
6.
7. Розв’яжіть:
8. Розв’яжіть:
9. Розв’яжіть:
10.
11.
12. Розв’яжіть:
13.
14.
15. Розв’яжіть:
16.
17. Розв’яжіть:
18.
19. Розв’яжіть:
20. Розв’яжіть:
21. Розв’яжіть:
22.
23.
24. Розв’яжіть:
25. Розв’яжіть:
26.

**Показникові нерівності**

Показниковими нерівностями називають нерівності вигляду  де  - додатне число, відмінне від 1, і нерівності, що зводяться до цього вигляду.

Нерівності розв'язуються за допомогою властивості зростання або спадання показникової функції:

- для зростаючої функції більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу

- для спадної функції більшому значенню функції відповідає меньше значення аргументу.

Показникова функція зростає при



і спадає при



Показникова нерівність рівносильна нерівності того ж змісту якщо

Приклад:

Розв'язати нерівності:

Маємо

Ця нерівність рівносильна нерівності того ж змісту , оскільки основа дорівнює ( ),

звідки знаходимо.

Показникова нерівність рівносильна нерівності протилежного змісту   якщо

Приклад:

Розв'язати нерівність:

Скориставшись тим, що , перепишемо задану нерівність у вигляді:

Основою є число .

Отже, розглянута нерівність рівносильна нерівності протилежного змісту ,

звідки знаходимо .

При розв’язуванні більш складних показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й при розв’язуванні рівнянь: спосіб винесення за дужки спільного множника, заміну змінних тощо, намагаючись зводити нерівності до найпростіших.

Приклад 1.

 Розв’яжіть нерівність:

Розв’язання:

Приклад 2.

 Розв’яжіть нерівність:

Розв’язання:

 Заміна

 Розв’язуючи цю нерівність, отримаємо  або . Повертаємося до змінної :

1. - немає розв’язків.

Отже, розв’язками нерівності є множина .

Приклад 3

розв’яжіть нерівність:

Розв’язання:

Заміна   дає нерівність

розв’язки якої   або

Отже

  (розв’язків немає) або   звідки  , тобто

Відповідь:

За допомогою загального методу інтервалів

Застосовуємо загальний метод інтегралів:

1. Знайти ОДЗ
2. Знайти нулі функції
3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак  у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, ураховуючи знак нерівності.

Приклад 4

розв’яжіть нерівність:

Розв’язання:

Розв’яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності

Позначимо

ОДЗ:

Нулі функції:

Оскільки функція  є зростаючою, то значення, що дорівнює нулю, вона набуває тільки в одній точці області визначення:

Позначимо нуль функції на ОДЗ , знаходимо знак  у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв’язки нерівності

Відповідь:

**Приклади розв’язування нерівностей**

1. Колективне розв'язування нерівності

## Розв'язання

Показникова функція  зростає, тому дана нерівність рівносильна нерівності . Розв'язуємо нерівність  методом інтервалів (рис. 156).

Маємо:

*Відповідь:*

2. Колективне розв'язування нерівності .

## Розв'язання

Зробимо заміну *,* тоді дана нерівність запишеться так:. Розв'яжемо одержану нерівність методом інтервалів (рис. 157),

тоді  або . Отже, маємо дві нерівності: або . Розв'яжемо їх:

1) — розв'язків немає;

2);

*Відповідь:*

 Розв'яжіть нерівність:
1)

Розв'язання

 Перетворюємо праву частину до показника і розв'язуємо
Нерівність виконується при  х>-3, тобто змінна повинна належати інтервалу від -3 до плюс безмежності

2)

Розв'язання

 Приклад аналогічний попередньому. Зводимо нерівність до однієї основи

Знак взято протилежний, тому що основа менша одиниці . Отримали у відповідь такий проміжок

3)

Розв'язання: Перетворимо праву частину нерівності щоб мати однакові основи
Оскільки основа менша одиниці, то міняємо знак нерівності і розв'язуємо
За теоремою Вієта коренями квадратного рівняння будуть .
Щоб ефективно і швидко знаходити проміжки на яких функція квадратного рівняння приймає знак "+" або "-" завжди користуйтесь правилом:
Підставляйте нуль – змінні зануляться і лишається вільний член. Дальше запам'ятайте, що знаки у випадку квадратичних функцій чи поліномів чергуються. В нашому випадку проміжок [-5;1] містить 0 і має від'ємний знак функція, що і вимагає нерівність. Тобто проміжок між коренями є розв'язком  , за його межами знак протилежний ("+").

4)

Розв'язання

 Не лякайтесь одиниці, її завжди можна представити як основу в нульовому степені.

Далі, оскільки основа менша одиниці – міняємо знак нерівності і знаходимо потрібний проміжок

Корені квадратного рівняння згідно теореми Вієта рівні
.
Не забуваємо, що потрібно виключити з розв'язку точку х=0 в якій знаменник рівний нулеві. Підстановкою нуля в квадратне рівняння отримуємо, що на (0;3) та від 4 до безмежності знак функції додатній

 5)

Розв'язання: Перетворимо показникову нерівність

Порівнюємо степені
Корені за теоремою Вієта будуть рівні . В нулі функція додатна, причому нуль не міститься в інтервалі між коренями квадратного рівняння.
Звідси розв'язком є два інтервали

 6)

Розв'язання: Виконаємо маніпуляції з нерівністю

Основа менша одиниці, тому знак змінюємо на протилежний

Коренями квадратного рівняння будуть . Також виключаємо 0 з розв'язків. Розбиваємо дійсну вісь на 4 інтервали і встановлюємо знак, для цього підставляємо точки з інтервалу.
В результаті отримаємо 2 проміжки де нерівність виконується

 7)

Розв'язання: Перетворимо нерівність

 8)

Розв'язання: Почати аналіз слід з того, що основа більша одиниці, оскільки Pi=3,14 при діленні на 3 дасть таке значення 1,047. Тому при однакових основах порівнюємо показники

Переносимо по одну сторону від знаку і зводимо до спільного знаменника дроби

причому перша лежить між двома наступними. Підстановкою нуля встановлюємо, що при х>-1 функція додатна. Рядом на інтервалах знаки чергуються. Остаточно отримаємо дві ділянки де виконується нерівність

**Нерівності для самостійного розв’язування**

1. Розв’яжіть:
2. Розв’яжіть:
3. Розв’яжіть:
4. Розв’яжіть:
5. Розв’яжіть:
6. Розв’яжіть:
7. Розв’яжіть:
8. Розв’яжіть:
9. Розв’яжіть:
10. Розв’яжіть:
11. Розв’яжіть:
12. Визначте найбільший розв’язок нерівності:
13. Визначте найменший цілий розв’язок нерівності:
14. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
15. Визначте найбільший розв’язок нерівності:
16. Визначте найменший цілий розв’язок нерівності:
17. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
18. Визначте найбільший розв’язок нерівності:
19. Визначте найменший цілий розв’язок нерівності:
20. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
21. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
22. Визначте найменший розв’язок нерівності:
23. Визначте найменший цілий розв’язок нерівності:
24. Визначте найбільший розв’язок нерівності:
25. Визначте найменший цілий розв’язок нерівності:
26. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
27. Визначте найменший цілий розв’язок нерівності:
28. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
29. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
30. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
31. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
32. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:
33. Визначте найбільший цілий розв’язок нерівності:

**Література**

Основна:

1. Семенов В.О., Тристан В.М. Доведення нерівностей. Показникові та логарифмічні нерівності. – Х.:ВГ «Основа», 2007
2. М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук Алгебра і початок аналізу 10-11 клас,-К.: Зодіак-Еко,1999
3. О.М. Афанасьєва, Я.С.Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпченко Математика,-К.: Вища школа,2001
4. О.М. Афанасьєва, Я.С.Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпченко Дидактичні матеріали з математики. К.: Вища школа,2001
5. Нелін.Є.П. Алгебра та початки аналізу: підручник для 10 класу загальн. учбових закладів. Х.: Гімназія, 2010
6. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас. Ред. З.І.Слєпкань. – Харків, «Гімназія»,2014

Додаткова:

1. Практикум з розв’язування задач з математики /Під ред. В.І. Михайловського. –К.,1989
2. Сборник задач по математике для поступающих в вузы/ Под ред. Н.И.Сканави. –М.,1988
3. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. –Ужгород: В-во «Shark», 2015. -238с.
4. Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів /за ред. Доц. О.М. Королюк. –Житомир:Вид-во ЖДУ ім. І.Франка, 2015. –Вип.8. 166с.