**Тотожні перетворення ірраціональних виразів. Ірраціональні рівняння. Ірраціональні нерівності**

**ПЛАН**

[1. Тотожні перетворення ірраціональних виразів. 3](#_Toc38627750)

[Задачі для самостійного розгляду 8](#_Toc38627751)

[2. Ірраціональні рівняння 10](#_Toc38627752)

[1. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня. 11](#_Toc38627753)

[2. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом введення нових змінних. 15](#_Toc38627754)

[3. Штучні прийоми розв’язання ірраціональних рівнянь 21](#_Toc38627755)

[4. Системи ірраціональних рівнянь. 21](#_Toc38627756)

[Задачі для самостійного розгляду 23](#_Toc38627757)

[3. Ірраціональна нерівності 25](#_Toc38627758)

[Задачі для самостійного розгляду 31](#_Toc38627759)

[Література 34](#_Toc38627760)

# 1. Тотожні перетворення ірраціональних виразів.

 Алгебраїчний вираз, що містить операції добування кореня зі змінної або піднесення змінної до раціонального степеня, що не є цілим числом, називається ірраціональним відносно змінної.

 Визначення арифметичного кореня. Якщо $a\geq 0$ і $n\in N, n>1,$то існує лише одне невід’ємне число $x$ таке, що виконується рівність $x^{n}=a.$ Це число $x$ називається арифметичним коренем $n$-го з невід’ємного числа $a$ і позначається $\sqrt[n]{a}.$

 З вище сказаного випливає, що рівність $\sqrt{49}=7$ є правильною, тоді як рівності $\sqrt{49}=-7 $або $\sqrt{49}=\pm 7$ є неправильними.

 Якщо $n$ – непарне число, більше 1, і $a<0$, тоді під $\sqrt[n]{a}$ розуміють таке невід’ємне число $x$, що $x^{n}=a$.

 Якщо $n, k, m\in N, a\geq 0 i b\geq 0,$ то:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}∙\sqrt[n]{b}$.

Ця властивість розповсюджується на добуток будь-якого числа множників, наприклад $\sqrt[3]{8∙27∙125}=\sqrt[3]{8}∙\sqrt[3]{27}∙\sqrt[3]{125}=2∙3∙5=30.$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$ якщо $b\ne 0$.

Зауваження. Якщо $a<0$ і $b<0$, то властивості 1 і 2 мають вигляд:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{\left|a\right|}∙\sqrt[n]{\left|b\right|}$ і $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{\left|a\right|}}{\sqrt[n]{\left|b\right|}}$.

3. $(\sqrt[n]{a})^{k}=\sqrt[n]{a^{k}}, $наприклад $(\sqrt[5]{a^{2}})^{3}=\sqrt[5]{(a^{2})^{3}}=\sqrt[5]{a^{6}}.$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}, $наприклад $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[12]{a}.$

5. $\sqrt[mn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^{k}},наприклад \sqrt[6]{a^{4}}=\sqrt[3]{a^{2}}, \sqrt[5]{a}=\sqrt[15]{a^{3}}.$

Зауваження. Якщо показники коренів – непарні числа, то властивості 1-5 виконуються і для $a<0$, $b<0$, і для $ab<0$.

Це одна важлива властивість арифметичного кореня: якщо число $n$ – пране число, тобто $n=2k$, то має місце тотожність $\sqrt[2k]{a^{2k}}=\left|a\right|,$ наприклад $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^{2}}=\left|\sqrt{3}-2\right|=2-\sqrt{3}.$

Означення степеня з раціональним показником.

1) Якщо $a\ne 0, то a^{0}=1.$

2) Якщо $a\geq 0, то a^{\frac{m }{n}}=\sqrt[n]{a^{m}} (n, m-натуральні числа, n\geq 2.$

3) Якщо $a>0, то a^{-r}=\frac{1}{a^{r}} \left(r-додатне раціональне число\right).$

4) Якщо $a<0,$ $m\in Z, то a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}.$

Перерахуємо основні властивості степенів з довільним раціональним показником:

1.$ a^{r}∙a^{s}=a^{rs}.$

2. $(a^{r})^{s}=a^{rs}$.

3. $(ab)^{r}=a^{r}∙b^{r}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{r}=\frac{a^{r}}{b^{r}}$.

5. $\frac{a^{r}}{a^{s}}=a^{r-s}, де a>0$ і $b>0$, $r i s-довільні раціональні числа.$

Приклад 1. Спростити вираз

$$A=\left(\sqrt{32}+\sqrt{45}-\sqrt{98}\right)\left(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8}\right).$$

Розв’язання. Спочатку спростимо кожен з радикалів:

$$\sqrt{32}=\sqrt{16∙2}=4\sqrt{2},$$

$$\sqrt{45}=\sqrt{9∙5}=3\sqrt{5},$$

$$\sqrt{98}=\sqrt{49∙2}=7\sqrt{2},$$

$$\sqrt{72}=\sqrt{36∙2}=6\sqrt{2},$$

$$500=\sqrt{100∙5}=10\sqrt{5},$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{4∙2}=2\sqrt{2}.$$

Після цього заданий вираз має вигляд:

$$A=\left(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2}\right)\left( 6\sqrt{2}-10\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(3\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)\left( 4\sqrt{2}-10\sqrt{5}\right).$$

Далі отримаємо:

$$A=12\sqrt{10}-24-150+30\sqrt{10}=42\sqrt{10}-174=$$

$$=6\left(7\sqrt{10}-29\right).$$

Приклад 2. Спростити вираз

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}∙\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}∙\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}×$$

$$×\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Розв’язання. Перемножимо спочатку третій і четвертий множники:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}∙\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$

$$\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^{2}}=\sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Отриманий результат помножимо на другий множник:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}∙\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{2}}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Цей результат помножимо на перший множник:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}∙\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}.$$

Тож, $A=1.$

Приклад 3. Спростити вираз $A=\sqrt[8]{(2-\sqrt{7})^{4}}.$

Розв’язання. За властивістю 5 отримуємо $\sqrt{(2-\sqrt{7})}$. Але $2-\sqrt{7}<0,$ а тому $A=\sqrt{-(2-\sqrt{7})}=\sqrt{\sqrt{7}-2}.$

Приклад 4. Спростити вираз $A=\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Розв’язання. Вираз спроститься, якщо виявиться, що під знаком кореня знаходиться повний квадрат різниці якихось двох чисел. Уявимо $10\sqrt{2}$ як подвоєний добуток двох чисел, сума квадратів яких буде дорівнювати 27, тобто $10\sqrt{2}=2∙\sqrt{2}∙5$. Таким чином $A=\sqrt{2-2\sqrt{2}∙5+25}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^{2}}=$

$=\left|\sqrt{2}-5\right|,$ тож з того, що $\sqrt{2}-5<0$ отримуємо, що $A=5-\sqrt{2}$.

Приклад 5. Спростити вираз $A=\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}.$

Розв’язання. Розмірковуючи так, які і в попередньому прикладу, запишемо підкореневий вираз у вигляді повного кубу різниці якихось двох чисел. Маємо:

$$9\sqrt{3}=3\sqrt{3}+6\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^{3}+3∙\sqrt{3}∙(\sqrt{2})^{2},$$

$$11\sqrt{2}=9\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\left(\sqrt{3}\right)^{2}∙\sqrt{2}+(\sqrt{2})^{3}.$$

Таким чином,

$$A=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\right)^{3}-3\left(\sqrt{3}\right)^{2}\sqrt{2}+3\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\right)^{2}-\left(\sqrt{2}\right)^{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Приклад 6. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}.$$

Розв’язання. Помноживши чисельник і знаменник дробу на «неповний квадрат» суми чисел $\sqrt[3]{2}$ і 1, отримаємо:

$$A=\frac{(\sqrt[3]{2})^{2}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^{3}-1^{3}}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

Приклад 7. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу

$$A=\frac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$$

Розв’язання. Звільнимося від $\sqrt{3}$ в знаменнику, для чого помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз, що є спряженим до знаменника:

$$A=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^{2}-3}=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}.$$

Тепер звільнимося від $\sqrt{2}$ в знаменнику:

$$A=\frac{3\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}∙\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{2}+2+\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Приклад 8. Обчислити суму $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

Розв’язання. Покладемо $A=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$ і піднесемо до третього степеня обидві частини цієї рівності. Отримаємо:

($20+\sqrt{392})+3\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^{2}\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}×$

$$× \left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^{2}+\left(20-\sqrt{392}\right)=A^{3},$$

або $40+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}∙\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}∙(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}})=A^{3},$ де $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=A.$

Таким чином, отримаємо $40+3\sqrt[3]{20^{2}+\left(\sqrt[3]{392}\right)^{2}}∙A=A^{3},$

$$40+6A=A^{3},$$

$$A^{3}-6A-40=0,$$

$$A^{3}-6A-40=\left(A^{3}-4A^{2}\right)+\left(4A^{2}-16A\right)+\left(10A-40\right)=$$

$$=A^{2}\left(A-4\right)+4A\left(A-4\right)+10\left(A-4\right)=\left(A-4\right)\left(A^{2}+4A+10\right).$$

З того, що $A^{2}+4A+10=\left(A^{2}+4A+4\right)+6=(A+2)^{2}+6\ne 0 $випливає що рівність $\left(A-4\right)\left(A^{2}+4A+10\right)=0$ виконується тільки при $A=4.$

Тож, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4.$

Приклад 9. Звести вираз

$$f\left(a\right)=\sqrt{a^{2}-4a+4}+\sqrt{a^{2}+6a+9}$$

до вигляд, що не містить знаки кореня і модуля.

Розв’язання.$ $

$$\sqrt{a^{2}-4a+4}=\sqrt{(a-2)^{2}}=\left|a-2\right|,$$

$$\sqrt{a^{2}+6a+9}=\sqrt{\left(a+3\right)^{2}}=\left|a+3\right|, тоді$$

$$f\left(a\right)=\left|a-2\right|+\left|a+3\right|.$$

Точки $a\_{1}=-3 i a\_{2}=2$ розбивають числову пряму на проміжки

$$\left(-\infty ;-3\right), \left[-3;\left.2\right), \right.\left[2;\left.+\infty \right). \right.$$

Розглянемо заданий вираз на кожному з проміжків.

При $a<-3 $маємо:

$$\left|a-2\right|=-a+2,$$

$$\left|a+3\right|=-a-3, тобто$$

$$f\left(a\right)=-a+2-a-3=-2a-1.$$

При $-3\leq a<2 $маємо:

$$\left|a-2\right|=-a+2,$$

$$\left|a+3\right|=a+3, тобто$$

$$f\left(a\right)=-a+2+a+3=5.$$

При $a\geq 2 $маємо:

$$\left|a-2\right|=a-2,$$

$$\left|a+3\right|=a+3, тобто$$

$$f\left(a\right)=a-2+a+3=2a+1.$$

Тож, $f\left(a\right)=\left\{\begin{array}{c}-2a-1, якщо a<-3,\\5, якщо-3\leq a<2,\\2a+1, якщо a\geq 2.\end{array}\right.$

### **Задачі для самостійного розгляду**

Знайти значення наступних виразів:

1. $2a^{2}-5ab+2b^{2} при a=\sqrt{6}+\sqrt{5} і b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Відповідь: 39.

2. $3a^{2}+4ab-3b^{2} при a=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} і b=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

Відповідь: $\frac{56\sqrt{10}+12}{3}$.

3. $4a^{3}+2a^{2}-8a+7 при a=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.

Відповідь: 10.

4. $\frac{a+b-1}{a-b+1} при a=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}, b=\frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}$.

Відповідь: $-\sqrt{xy}$.

5. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} при x=\frac{2ab}{1+b^{2}}.$

Відповідь: $\frac{1}{b}.$

6. $2a\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}(x+\left(1+x^{2}\right)^{\frac{1}{2}})^{-1} $при $x=\frac{1}{2}\left(\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(ba^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Відповідь: $a+b, якщо a>0 i b>0 та \frac{a(a+b)}{b}, якщо a<0 i b<0.$

Спростити вирази:

7. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}.$

Відповідь:$ 2+\sqrt{3}$

8. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$

Відповідь: $\sqrt{2}-1$

9. ($\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}})∙\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Відповідь: 3.

10. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Відповідь: $\sqrt{2}.$

11. $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}.$

Відповідь: $(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{2}$.

12. $\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}.$

Відповідь: $1+\sqrt{2}$.

13. $\sqrt[4]{28+16\sqrt{3}}.$

Відповідь: $\sqrt{3}-1$

14. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}.$

Відповідь: $\sqrt{5}-2$

15.$ \sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}.$

Відповідь: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$

Звільнитися від ірраціональності в знаменниках дробів.

16. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}.$

Відповідь: $\frac{\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$

17.$ \frac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}.$

Відповідь: $\frac{\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{105}+\sqrt[3]{49}}{8}$

18.$ \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}.$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{2}$

19. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$

Відповідь:$ \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{4}$

20.$ \frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}.$

Відповідь: $1+\sqrt{2}$

# **2. Ірраціональні рівняння**

Означення. Ірраціональними називають рівняння, в яких невідома величина розміщена під знаком кореня або під знаком операції піднесення до дробового степеня. Такі рівняння розглядають над полем дійсних чисел.

В окремих випадках, не розв’язуючи дане ірраціональне рівняння, можна встановити, що воно не має коренів. Наприклад, рівняння $ \sqrt{x-4}=0 $не має коренів, бо арифметичний корінь не може бути від’ємним.

Рівняння $\sqrt{x+7}+\sqrt{x}=0$ не має розв’язків, бо обидва доданки є арифметичними коренями, а тому не можуть бути від’ємними. А сума двох невід’ємних чисел дорівнює нулю лише тоді, коли кожен доданок дорівнює нулю. Одночасно ж вирази$ x+7$ і $x$ нулю дорівнювати не можуть.

Основними методами розв’язування ірраціональних рівнянь:

1) піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня;

2) введення нових (допоміжних) змінних.

Але іноді доводиться використовувати і штучні прийоми розв’язання ірраціональних рівнянь.

Зауваження. Під час розв'язуванні ірраціональних рівнянь необхідно визначати область допустимих значень (ОДЗ). Крім того, варто робити перевірку, підставляючи знайдені значення невідомих у вихідне рівняння, оскільки при піднесенні обох частин початкового рівняння $f\left(x\right)=φ\left(x\right)$ до парного степеня дістаємо рівняння, що є результатом не тільки рівняння $f\left(x\right)=φ\left(x\right)$, але і рівняння $f\left(x\right)=-φ\left(x\right)$, оскільки і $\left(f\left(x\right)\right)^{2}=\left(φ\left(x\right)\right)^{2}$ , і $\left(f\left(x\right)\right)^{2}=\left(-φ\left(x\right)\right)^{2}$. Так, наприклад, візьмемо рівняння$ $

$$\sqrt{x+5}=x-1.$$

 Піднісши обидві частини цього рівняння до квадрата, дістанемо

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^{2}=\left(x-1\right)^{2}$$

$$x+5=x^{2}-2x+1$$

$$x^{2}-3x-4=0$$

Коренями цього рівняння є числа $x\_{1}=-1, x\_{2}=4, $ Однак після перевірки переконуємось, що $x\_{2}=4 $є коренем рівняння $\sqrt{x+5}=x-1$, а $x\_{1}=-1 $є побічним коренем.

В залежності від виду знайдених розв’язків (прості чи складні), а також в залежності від способу розв’язання рівнянь може бути обраний той чи інший спосіб перевірки.

**1. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня.**

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6.$$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$x-1+2\sqrt{\left(x-1\right)\left(2x+6\right)}+2x+6=36,$$

$$2\sqrt{2x^{2}+4x-6}=-3x+31.$$

Після піднесення до квадрату останнього рівняння отримаємо:

$$8x^{2}+16x-24=9x^{2}-186x+961,$$

$$x^{2}-202x+985=0,$$

звідки знаходимо $x\_{1}=5, x\_{2}=197.$

Перевірка. Знайдені корені перевірити безпосередньо підстановкою до рівняння.

1) $\sqrt{x\_{1}-1}+\sqrt{2x\_{1}+6}=\sqrt{5-1}+\sqrt{2∙5+6}=\sqrt{4}+\sqrt{16}=2+4=6.$

Таким чином, $x\_{1}=5$ є коренем заданого рівняння.

2)$ \sqrt{x\_{2}-1}+\sqrt{2x\_{2}+6}=\sqrt{197-1}+\sqrt{2∙197+6}\ne 6.$

Тобто, $x\_{2}=197$ – сторонній корінь. Таким чином, лише $x\_{1}=5$ є коренем заданого рівняння.

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2+x} (1)$$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$2\sqrt{x^{2}-3x+2}=-x+5. (2)$$

Після піднесення до квадрату останнього рівняння отримаємо:

$$3x^{2}-2x-17=0,$$

звідки знаходимо $x\_{1}=\frac{1+2\sqrt{13}}{3}, x\_{2}=\frac{1-2\sqrt{13}}{3}.$

 Перевірка. Перевіряти знайдені корені підстановкою до рівняння не доцільно. Вчинимо наступним чином. Знайдемо область визначення рівняння. З системи нерівностей:

$$\left\{\begin{matrix}x-2\geq 0,\\x-1>0,\\2+x\geq 0\end{matrix}\right.$$

знаходимо, що цією областю є промінь $\left[2;\left.+\infty \right)\right.$. Визначимо, чи належать знайдені корені цьому променю. Маємо:

$$x\_{1}-2=\frac{1+2\sqrt{13}}{3}-2=\frac{1+2\sqrt{13}-6}{3}=\frac{\sqrt{52}-\sqrt{25}}{3}>0.$$

Таким чином, $x\_{1}>2$, тобто $x\_{1}$ належить цьому променю, а отже є коренем рівняння.

$$x\_{2}-2=\frac{1-2\sqrt{13}}{3}-2=\frac{1-2\sqrt{13}-6}{3}<0.$$

Таким чином, $x\_{2}<2$, тобто $x\_{2}$ не належить цьому променю, а отже не є коренем рівняння.

Повернемося до $x\_{1}$. Визначимо знак різниці, що знаходиться в правій частині рівняння (2)$.$ Маємо

$$-x\_{1}+5=-\frac{1+2\sqrt{13}}{3}+5=\frac{-2\sqrt{13}+14}{3}>0.$$

Таким чином, $x\_{1} $є коренем рівняння (2)$.$ А з того, що рівняння$ (1)$ і рівняння $(2)$ рівносильні, то коренями рівняння (2) є лише корені рівняння (1). Тож, коренем рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2+x} $ є $ x=\frac{1+2\sqrt{13}}{3}$.

Приклад 3. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{x^{2}+x-5}+\sqrt{x^{2}+8x-4}=5. (1)$$

Розв’язання. Перетворимо це рівняння до виду

$$\sqrt{x^{2}+x-5}=5-\sqrt{x^{2}+8x-4}$$

і піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$x^{2}+x-5=25-10\sqrt{x^{2}+8x-4}+x^{2}+8x-4,$$

$$10\sqrt{x^{2}+8x-4}=7x+26. (2)$$

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрату:

$100\left(x^{2}+8x-4\right)=(7x+26)^{2}$ або $51x^{2}+436x-1076=0. $З останнього рівняння знаходимо $x\_{1}=2, x\_{2}=-\frac{538}{51}$.

Перевірка. Перший зі знайдених коренів не важко перевірити підстановкою до вихідного рівняння. Така перевірка показує, що $x\_{1}=2-корінь рівняння (1). $Спроба перевірити таким чином інший корінь призводить до громіздких обчислень. Можна, однак, зробити по-іншому. З’ясуємо, чи є $x\_{2}=-\frac{538}{51}$ коренем рівняння (2). Зауважимо, що при цьому значенні ліва частина рівняння (2) невід’ємна, а права – від’ємна. Отже, $x\_{2}=-\frac{538}{51}$ не є коренем рівняння (2). Але рівняння (2) наслідок рівняння (1), тоді тим більше $x\_{2}$ не є коренем рівняння (2). Тому коренем рівняння (2) є $x=2$.

Приклад 4. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{x\_{1}-1}-\sqrt[3]{2x-6}=2.$$

Розв’язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді $\sqrt[3]{2x-6}=2-\sqrt{x\_{1}-1}.$

Піднесемо до третього степеня обидві частини цього рівняння:

$$2x-6=\left(x+1\right)\sqrt{x+1}-6\left(x+1\right)+12\sqrt{x+1}-8.$$

Після зведення подібних членів отримаємо рівняння

$$\left(x+13\right)\sqrt{x+1}=8\left(x+1\right),$$

звідки $\left(x+13\right)^{2}\left(x+1\right)=64\left(x+1\right)^{2}$, і далі

 $(x+1)( \left(x+13\right)^{2}-64\left(x+1\right)=0$, або $\left(x+1\right)\left(x^{2}-38x+105\right)=0.$

Таким чином, задача зводиться до розв’язання сукупності:

$$\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x+1=0, }{x^{2}-38x+105=0;}\right.$$

звідки знаходимо $x\_{1}=-1, x\_{2}=3$, $x\_{3}=35$.

Перевірка. Підстановкою знайдених значень$ x$ в задане рівняння переконуємося, що всі вони є його коренями.

Приклад 5. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}=\sqrt[3]{2x-1}. (1)$$

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня.

$$2x+1+3\sqrt[3]{(2x+1)^{2}}∙\sqrt[3]{6x+1}+3\sqrt[3]{2x+1}∙\sqrt[3]{\left(6x+1\right)^{2}}+6x+1=2x-1,$$

і далі 3$\sqrt[3]{2x+1}∙\sqrt[3]{6x+1}\left(\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}\right)=-6x-3$. Скориставшись рівнянням (1), замінимо вираз $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}$ на $\sqrt[3]{2x-1}$

$$3\sqrt[3]{2x+1}∙\sqrt[3]{6x+1}∙\sqrt[3]{2x-1}=-6x-3,$$

або

$$\sqrt[3]{(2x+1)(6x+1)(2x-1)}=-2x-1. (2)$$

Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня.

$$\left(2x+1\right)\left(6x+1\right)\left(2x-1\right)=-\left(2x+1\right)^{3},$$

і далі

$$\left(2x+1\right)\left(\left(6x+1\right)\left(2x-1\right)+\left(2x+1\right)^{2}\right)=0,$$

звідки знаходимо $x\_{1}=-0,5; x\_{2,3}=0.$

Перевірка. Підстановку знайдених значень $x$ в задане рівняння (1) переконуємо, що коренем є лише $x=-0,5.$

**2. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом введення нових змінних.**

Приклад 6. Розв’яжемо рівняння

$$x^{2}+3-\sqrt{2x^{2}-3x+2}=1,5\left(x+4\right) (1)$$

Розв’язання. Піднесення обох частин рівняння (1) до квадрату привело б до громіздкого рівняння. В той же час, якщо проявити деяку спостережливість, можна помітити, що рівняння (1) легко зводиться до квадратного. Дійсно, помноживши обидві його частина на 2, отримаємо:

$$2x^{2}+6-2\sqrt{2x^{2}-3x+2}=3x+12,$$

і далі $2x^{2}-3x+2-2\sqrt{2x^{2}-3x+2}-8=0.$

Поклавши $y=\sqrt{2x^{2}-3x+2},$ отримаємо $y^{2}-2y-8=0,$ звідки

$$ y\_{1}=4, y\_{2}=-2.$$

Отже, рівняння (1) рівносильне наступній сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{matrix}\sqrt{2x^{2}-3x+2}=4;\\\sqrt{2x^{2}-3x+2}=-2.\end{matrix}\right.$$

З першого рівняння цієї сукупності знаходимо $x\_{1}=\frac{7}{2}, x\_{2}=-2.$

Друге рівняння коренів не має.

Перевірка. З того, що сукупність рівнянь рівносильна рівнянню (1), причому друге рівняння цієї сукупності коренів не має, то знайдені корені можна перевірити підстановкою до рівняння $\sqrt{2x^{2}-3x+2}=4$. Ця підстановка показує, що обидва знайдених значення $x$ є коренями цього рівняння, а отже, і заданого рівняння (1).

Приклад 6. Розв’яжемо рівняння

$$2x-5+2\sqrt{x^{2}-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48, (1)$$

Розв’язання. Областю визначення рівняння (1) є промінь $\left[5;\right.\left.+\infty \right)$. В цій області вираз$ \sqrt{x^{2}-5x}$ можна представити наступним чином:

$$\sqrt{x^{2}-5x}=\sqrt{x}\sqrt{x-5}.$$

З того, що $2x=x+x$, рівняння (1) далі можна переписати так:

$$x+x-5+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}-48=0,$$

або

$$(\sqrt{x})^{2}+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}+(\sqrt{x-5})^{2}+2\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)-48=0,$$

тобто

$$\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)^{2}+2\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)-48=0.$$

Поклавши $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{x}$, отримаємо квадратне рівняння

$y^{2}+2y-48=0,$ з якого знаходимо $y\_{1}=6, y\_{2}=-8$. Таким чином, задача звелася до розв’язання сукупності рівнянь:

$$\left[\begin{matrix}\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=6;\\\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=-8.\end{matrix}\right.$$

 З першого рівняння сукупність знаходимо $x=\left(\frac{41}{12}\right)^{2},$ друге рівняння сукупності розв’язання не має.

 Перевірка. Легко показати, що $x=\left(\frac{41}{12}\right)^{2}$ є коренем рівняння $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=6.$ Але це рівняння рівносильне рівнянню (1), отже$ x=\left(\frac{41}{12}\right)^{2}$ є коренем і рівняння (1).

 Інколи при розв’язанні ірраціональних рівнянь видається зручним ввести дві нові допоміжні змінні.

Приклад 8. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2. (1)$$

Розв’язання. Покладемо $\left\{\begin{matrix}u=\sqrt[4]{1-x}\\v=\sqrt[4]{15+x}.\end{matrix}\right.$

Тоді рівняння (1) приймає вид $u+v=2.$ Але для знаходження значень нових змінних одного рівняння недостатньо. Піднісши до четвертого степеня обидві частини кожного рівняння системи, отримаємо:

$$\left\{\begin{matrix}u^{4}=1-x\\v^{4}=15+x.\end{matrix}\right.$$

 Складемо рівняння останньої системи: $u^{4}+v^{4}=16.$

 Таким чином, для знаходження $u$ та $v$, ми маємо наступну симетричну систему рівнянь:

$$\left\{\begin{matrix}u+v=2, \\u^{4}+v^{4}=16.\end{matrix}\right.$$

Розв’язавши цю систему, знаходимо:

$$\left\{\begin{matrix}u\_{1}=0,\\v\_{1}=2;\end{matrix} \left\{ \begin{matrix}u\_{2}=2,\\v\_{2}=0.\end{matrix}\right. \right.$$

 Таким чином, розв’язання рівняння (1) звелося до розв’язання наступної сукупності системи рівнянь:

 $\left\{\begin{matrix}\sqrt[4]{1-x}=0, \\\sqrt[4]{15+x}=2; \end{matrix}\right. $ $ \left\{\begin{matrix}\sqrt[4]{1-x}=2, \\\sqrt[4]{15+x}=0; \end{matrix}\right.$

 Розв’язавши цю сукупність, знаходимо $x\_{1}=1, x\_{2}=-15.$

 Перевірка. Простіше за все перевірити знайдені корені підставивши їх безпосередньо в задане рівняння. Зробивши це, переконаємося, що обидва знайдених значення $x$ є коренями заданого рівняння.

 Зауваження. Прийом, що використано під час розв’язання рівняння (1), міг би бути використаний і під час розв’язання деяких інших рівнянь із розглянутих вище. Так, розв’язуючи рівняння $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$, можна було покласти:

$$\left\{\begin{matrix}u=\sqrt{x+1}\\v=\sqrt[3]{2x-6}.\end{matrix}\right.$$

Тоді ми б прийшли до системи рівнянь

$$\left\{\begin{matrix}u-v=2, \\2u^{2}-v^{3}=8.\end{matrix}\right.$$

Цей прийом можна було використати і до розв’язання рівняння з прикладу 1.

Приклад 9. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^{2}+28^{2}}-x^{2}}=3. (1)$$

Розв’язання. Поклавши

$$\left\{\begin{matrix}u=\sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x}{x}}\\v=\sqrt{x\sqrt{x^{2}+28^{2}}-x^{2}}.\end{matrix} (2)\right.$$

прийдемо до рівняння $u- v=3$. Перемножимо праві частині рівняння системи (2)

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x}{x}}\sqrt{x\sqrt{x^{2}+28^{2}}-x^{2}}=$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x}{x}x(\sqrt{x^{2}+28^{2}}-x)}=\sqrt{(\sqrt{x^{2}+28^{2}})^{2}-x^{2}}=28. $$

 Отриманий результат приводить до іншого рівняння відносно нових змінних: $uv=28.$ Розв’язавши систему

$$\left\{\begin{matrix}u- v=3,\\uv=28, \end{matrix}\right.$$

знаходимо:

$$\left\{\begin{matrix}u\_{1}=7,\\v\_{1}=4;\end{matrix} \left\{ \begin{matrix}u\_{2}=-4,\\v\_{2}=-7.\end{matrix}\right. \right.$$

Таким чином, ми приходимо до сукупності систем рівнянь. З цієї сукупності випишемо тільки систему, що відповідає додатним значенням $u\_{1},$ $v\_{1}$( система, що відповідає від’ємним значенням $u\_{2},$ $v\_{2}$, розв’язків немає, тому її опускаємо):

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x}{x}}=7,\\\sqrt{x\sqrt{x^{2}+28^{2}}-x^{2}}=4.\end{matrix} (3)\right.$$

 Розв’яжемо друге рівняння системи (3). Піднесемо обидві його частини до квадрату: $x\sqrt{x^{2}+28^{2}}-x^{2}=16,$ і далі

$$x\sqrt{x^{2}+28^{2}}=x^{2}+16. \left(4\right)$$

 Тепер піднесемо до квадрату обидві частини рівняння (4):

$$x^{2}\left(x^{2}+28^{2}\right)=(x^{2}+16)^{2}, (5)$$

і далі 752$x^{2}-256=0.$

З останнього рівняння знаходимо $x\_{1}=\frac{4\sqrt{47}}{47}, x\_{2}=-\frac{4\sqrt{47}}{47}$.

Перевірка. Ясно, що$ x\_{2}$ не задовольняє рівнянню (4), а отже, і другому рівнянню системи (3). Перевіримо $x\_{1}$. Тож, при $x>0$, рівняння (5), (4) і друге рівняння системи (3) рівносильні, то $x=\frac{4\sqrt{47}}{47}$ – корінь другого рівняння системи (3). Тепер ми повинні переконатися в тому, що знайдене значення $x\_{1}$ задовольняє і першому рівнянню системи (3) (тільки в цьому випадку ми можемо вважати це значення розв’язком системи 3). Зведемо це рівняння до рівносильного, але більш простого. Маємо:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x}{x}}=7, $$

$$\sqrt{x^{2}+28^{2}}+x=49x, $$

$$\sqrt{x^{2}+28^{2}}=48x,$$

$$ x^{2}+28^{2}=48^{2}x^{2},$$

$$(48^{2}-1)x^{2}=28^{2}.$$

 Значення $x\_{1}$ задовольняє останньому рівнянню, а разом з тим і першому рівнянню (3). Тож, $x=\frac{4\sqrt{47}}{47}$ – розв’язання системи (3), а отже, і рівняння (1).

 Приклад 10. Розв’яжемо рівняння.

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{\left(x-1\right)\left(x-33\right)}=1. (1)$$

Розв’язання. Покладемо

$$\left\{\begin{matrix}u=\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}\\v=\sqrt[4]{\left(x-1\right)\left(x-33\right)}.\end{matrix} (2)\right.$$

Тоді рівняння (1) має $u-v=1.$ Для отримання другого рівняння відносно нових змінних $u,$ $v$ піднесемо обидві частини першого рівняння системи (2) до п’ятого степеня, а другого – до четвертого степеня. Отримаємо:

$$\left\{\begin{matrix}u^{5}=x^{2}-34x+64,\\v^{4}=x^{2}-34x+33.\end{matrix}\right.$$

звідки $u^{5}-v^{4}=31.$ Таким чином, для знаходження $u,$ $v$ ми маємо наступну систему рівнянь:

$$\left\{\begin{matrix}u-v=1,\\u^{5}-v^{4}=31,\end{matrix}\right.$$

звідки

$$\left\{\begin{matrix}v=u-1, \\u^{5}-v^{4}+4u^{3}-6u^{2}+4u-32=0, \end{matrix} (3)\right.$$

 З другого рівняння системи (3) знаходимо $u\_{1}=2.$ Розділивши многочлен $u^{5}-u^{4}+4u^{3}-6u^{2}+4u-32$ на двочлен $u-2$, отримаємо в частці $u^{4}+u^{3}+6u^{2}+6u+16.$

 Таким чином, система (3) рівносильна сукупності систем

$$\left\{\begin{matrix}v=u-1, \\ u-2=0, \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}v=u-1, \\u^{4}+u^{3}+6u^{2}+6u+16=0. \end{matrix}\right.$$

 З першої системи знаходимо $u\_{1}=2,$ $v\_{1}=1,$

 Друга система більш складна. Під час її розв’язання необхідно врахувати наступне. З того, що $\sqrt[4]{\left(x-1\right)\left(x-33\right)}=v$, то $v\geq 0.$

 Оскільки $u-v=1,$ то $u=v+1,$ тож $u\geq 1.$ Ясно, що рівняння

$u^{4}+u^{3}+6u^{2}+6u+16=0$не має додатних коренів і тим більше таких коренів, які задовольняли б нерівності $u\geq 1.$

 Тож, єдине розв’язання системи (3) $u\_{1}=2, v\_{1}=1,$ і нам залишається розв’язати таку систему:

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}=2,\\\sqrt[4]{\left(x-1\right)\left(x-33\right)}=1.\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt[5]{x^{2}-34x+64}=2,\\\sqrt[4]{x^{2}-34x+33}=1.\end{matrix}\right.$$

Покладемо $y=x^{2}-34x+33,$

тоді система має вигляд:

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt[5]{y+31}=2,\\\sqrt[4]{y}=1. \end{matrix}\right.$$

 З цієї системи знаходимо$ y=1$. Тоді$ x^{2}-34x+33=1$, звідки $x\_{1,2}=17\pm \sqrt{257}.$

 Перевірка. Перевірити такі значення $x$ підстановкою в задане рівняння (1), звісно, складно. Можна спробувати виконати перевірку доведенням рівносильних рівнянь, отриманих на всіх етапах розв’язку рівняння (1). Аналізуючи ці рівняння, приходимо до висновку, що знайдені значення $x$ є коренями рівняння (1).

**3. Штучні прийоми розв’язання ірраціональних рівнянь**

Приклад 11. Розв’яжемо рівняння

$$\sqrt{2x^{2}+3x+5}+\sqrt{2x^{2}-3x+5}=3x. (1)$$

Розв’язання. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз

$$φ\left(x\right)=\sqrt{2x^{2}+3x+5}-\sqrt{2x^{2}-3x+5},$$

спряжений до виразу $\sqrt{2x^{2}+3x+5}+\sqrt{2x^{2}-3x+5}$.

 Отже, якщо

$$\left(\sqrt{2x^{2}+3x+5}+\sqrt{2x^{2}-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^{2}+3x+5}-\sqrt{2x^{2}-3x+5}\right)=$$

$$=\left(2x^{2}+3x+5\right)-\left(2x^{2}-3x+5\right)=6x,$$

то рівняння (1) має вид

$$6x=3x\left(\sqrt{2x^{2}+3x+5}-\sqrt{2x^{2}-3x+5}\right),$$

або $x\left(\sqrt{2x^{2}+3x+5}-\sqrt{2x^{2}-3x+5}\right)=0. (2)$

 Склавши рівняння (1) і (2), прийдемо до рівняння

$$2\sqrt{2x^{2}+3x+5}=3x=2. (3)$$

 Розв’язуючи рівняння (21) методом піднесення до квадрату, отримаємо:

$$8x^{2}+12x+20=9x^{2}+12x+4,$$

і далі $x^{2}=16$, звідки $x\_{2}=4, x\_{3}=-4.$

 Перевірка. По черзі підставляючи знайдені значення $x\_{1}=0$ $x\_{2}=4, x\_{3}=-4 $і рівняння (1), переконаємося, що йому задовольняє тільки значення $x\_{2}=4$. Таким чином, $x=4-$ єдиний корінь рівняння (1).

**4. Системи ірраціональних рівнянь.**

Приклади 12. Розв’яжемо системи рівнянь

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2,\\4y^{2}-1=3y(x-1).\end{matrix} (1)\right.$$

Розв’язання. Покладемо $u=\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}$. Тоді перше рівняння системи (1) матиме вигляд $u+\frac{1}{u}=2$, звідки знаходимо $u=1.$

 Таким чином, розв’язання системи (1) зводиться до розв’язання наступної системи:

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}=1, \\4y^{2}-1=3y(x-1).\end{matrix} (2)\right.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини першого рівняння системи (2), і звільнившись від знаменника, приходимо до системи

$$\left\{\begin{matrix}3x-2y=2x, \\4y^{2}-1=3y\left(x-1\right), \end{matrix} (3)\right.$$

з якої знаходимо:

$$\left\{\begin{matrix}x\_{1}=2,\\y\_{1}=1;\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}x\_{2}=1,\\y\_{2}=\frac{1}{2}.\end{matrix}\right.$$

Перевірка. За умови, що $x\ne 0 і 3x\ne 2y$, система (3) рівносильна системі (2). В свою чергу система (2) рівносильна системі (1). Таким чином, розв’язання системи (3) є також розв’язком системи (1). Тож, розв’язками системи (1) є пари (2;1) і (1;$ \frac{1}{2})$.

Приклад 13. Розв’яжемо систему рівнянь

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\\sqrt[6]{\left(x+y\right)^{3}(x-y)^{2}}=8.\end{matrix}\right. (1)$$

Розв’язання. З того, що $\sqrt[6]{\left(x+y\right)^{3}(x-y)^{2}}=\sqrt[6]{(x+y)^{3}}∙\sqrt[6]{\left(x-y\right)^{2}},$ а

$\sqrt[6]{\left(x-y\right)^{2}}=\sqrt[3]{|x-y|},$ то система (1) матиме такий вигляд:

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\\sqrt{x+y}∙\sqrt[3]{\left|x-y\right|}=8.\end{matrix} (2)\right.$$

Ця система рівносильна наступній сукупності систем:

$\left\{\begin{matrix}x-y\geq 0, \\\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\\sqrt{x+y}∙\sqrt[3]{\left|x-y\right|}=8;\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}x-y<0, \\\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\\sqrt{x+y}∙\sqrt[3]{\left|x-y\right|}=8.\end{matrix}\right. (3)$

Покладаючи $\left\{\begin{matrix}u=\sqrt{x+y},\\v=\sqrt[3]{x-y},\end{matrix}\right.$ отримаємо сукупність систем

$\left\{\begin{matrix}x-y\geq 0, \\u+v=6, \\uv=8; \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}x-y<0, \\u+v=6, \\uv=-8. \end{matrix}\right.$

Розв’язання першої системи сукупності не викликає труднощів. Під час розв’язання другої системи цієї сукупності слід врахувати, що $x-y<0$, тобто $v<0.$

 Таким чином, з сукупності знаходимо:

$$\left\{\begin{matrix}x\geq y, \\u\_{1}=2,\\v\_{1}=4;\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}x\geq y, \\u\_{2}=4,\\v\_{2}=2;\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}x\geq y, \\u\_{3}=3+\sqrt{17},\\v\_{3}=3-\sqrt{17};\end{matrix}\right.$$

звідки

$$\left\{\begin{matrix}x\_{1}=34, \\y\_{1}=-30;\end{matrix} \left\{\begin{matrix}x\_{2}=12, \\y\_{2}=4; \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}x\_{3}=103-19\sqrt{17}, \\y\_{3}=-77+25\sqrt{17}. \end{matrix}\right.\right.$$

 Перевірка. Перші два розв’язки легко перевірити безпосередньо підстановкою в систему (1). Однак перевірити таким же чином третій розв’язок непросто. Але, як не складно переконатися, сукупність (3) рівносильна системі (2), а система (2) рівносильна заданій системі (1). Тому розв’язання сукупності (3) є розв’язанням і системи (1).

### **Задачі для самостійного розгляду**

Розв’язати рівняння

1. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}=1.$

Відповідь: 2; 3.

2. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$

Відповідь: 7; 8.

3. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}.$

Відповідь: 2.

4. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=2.$

Відповідь: розв’язків немає.

5. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=0.$

Відповідь: 0.

6. $\sqrt{4-2x}+\sqrt{2+x}=2\sqrt{2}.$

Відповідь: -2; $\frac{14}{9}.$

7. $\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=1.$

Відповідь: $\frac{4+\sqrt{3}}{2}.$

8. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^{2}+1}}=x+1$

Відповідь: 0; 2.

9. $1-x=\sqrt{1-\sqrt{4x^{2}-7x^{4}}.}$

Відповідь: 0; 0,5

10. $\sqrt{1-\sqrt{x^{4}-x^{2}}}=x-1.$

Відповідь: 1,25.

11. $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^{2}+7}}=3.$

Відповідь: -1, 1.

12. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

Відповідь: 5.

13. $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^{2}+x+3}}}=1.$

Відповідь: -37; 6.

14.$\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

Відповідь: 2.

15. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$

Відповідь: 15.

16. $\sqrt[3]{2x\left(4x^{2}+3\right)-1-12x^{2}}+x=x^{2}-11.$

Відповідь: -2; 5.

17. $\sqrt{x^{2}+x-2}+\sqrt{x^{2}+2x-3}=\sqrt{x^{2}-3x+2.}$

Відповідь: 1.

Розв’язати системи рівнянь.

18.$ \left\{\begin{matrix}\sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}=1, \\\sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{matrix} \right.$

Відповідь: (1;4).

19. $\left\{\begin{matrix}\sqrt{\frac{x^{3}}{y}}-\sqrt{\frac{y^{3}}{x}}=\frac{65}{6}, \\x-y=5. \end{matrix} \right.$

Відповідь: (9;4).

20. $\left\{\begin{matrix}y^{2}+\sqrt{3y^{2}-2x+3}=\frac{2}{3}x+5, \\3x-2y=5. \end{matrix} \right.$

Відповідь: $\left(\frac{17}{27}; -\frac{14}{9}\right), (3;2).$

21. $\left\{\begin{matrix}\sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\\sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3.\end{matrix} \right.$

Відповідь: (3;1).

22. $\left\{\begin{matrix}2\sqrt{x-y}+\sqrt[4]{x+2y}=4, \\\sqrt[6]{(x-y)^{4}(x+2y)^{2}}=2.\end{matrix} \right.$

Відповідь: (6;5).

# **3. Ірраціональна нерівності**

 Під час розв’язання ірраціональних нерівностей використовуються ті ж самі прийоми, що і під час розв’язання ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного і того ж натурального степеня, введення нових (допоміжних змінних) тощо. Виконувати розв’язання можна, дотримуючись, наприклад, наступного плану:

1) Знайти область визначення заданої нерівності.

2) Користуючись реченнями про рівносильність рівностей, розв’язати нерівність.

3) Зі знайдених розв’язків відібрати значення змінної, що належать області визначення заданої нерівності.

Приклад 1. Розв’яжемо нерівність.

$$\sqrt{5x-4}<x. (1)$$

Розв’язання. 1) Область визначення нерівності (1): $x\geq \frac{4}{5}.$

2) З того, що на множині $x\geq \frac{4}{5}$ обидві частини нерівності (1) піднести до квадрату отримаємо $5x-4<x^{2}$, або $x^{2}-5x+4>0.$ Ця нерівність рівносильна нерівності (1) в області її визначення. З останньої нерівності знаходимо $x<1; x>4.$

3) Зі знайденої сукупності $x<1; x>4$ розвязаннями нерівності (1) будуть лиш ті значення $x$, які належать області визначення нерівності (1), тобто $x$, що є розв’язками наступної системи:

$$\left\{\begin{matrix}x<1; x>4,\\x\geq \frac{4}{5}. \end{matrix}\right.$$

З цієї системи знаходимо $\frac{4}{5}\leq x<1;x>4$ – розв’язки нерівності (1).

 Приклад 2. Розв’яжемо нерівність.

$$\sqrt{x+2}<x+\frac{1}{2}. (2)$$

Розв’язання. 1) Область визначення нерівності (2): $x\geq -2.$

2) На множні $x\geq -2$ ліва частина нерівності (2) невід’ємна, а права частина може приймати як невід’ємні, так і від’ємні значення. Тому необхідно розглянути два випадки:$ x+\frac{1}{2}\geq 0 і x+\frac{1}{2}<0$. В першому випадку можна обидві частини нерівності (2) піднести до квадрату (можна в тому сенсі, що отримається рівносильна нерівність), а у другому цього робити не можна, та і не потрібно, тому що зрозуміло, що при $x+\frac{1}{2}<0$ отримається, що ліва частина нерівності (2) невід’ємна, а права від’ємна, а це суперечить сенсу нерівності (2). Отже, нерівність (2) рівносильна на своїй області визначення наступній системі:

$$\left\{\begin{matrix}x+\frac{1}{2}\geq 0, \\\left(\sqrt{x+2}\right)^{2}<\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}.\end{matrix}\right.$$

З цієї системи заходимо $x\geq \frac{\sqrt{7}}{2}.$

2) Залишається з розв’язань $x\geq \frac{\sqrt{7}}{2}$ відібрати ті значення $x$, що належать множині $x\geq -2$, тобто розв’язати систему нерівностей

$$\left\{\begin{matrix}x\geq \frac{\sqrt{7}}{2} , \\ x\geq -2. \end{matrix}\right.$$

Отримаємо ($\frac{\sqrt{7}}{2};+\infty )$ – розв’язання нерівності (2).

Приклад 3. Розв’яжемо нерівність.

$$\sqrt{x+2}>x+\frac{1}{2}. (3)$$

Розв’язання. 1) Область визначення нерівності (2): $x\geq -2.$

2) Як у попередньому прикладі, необхідно розглянути два випадки:$ x+\frac{1}{2}\geq 0 і x+\frac{1}{2}<0$.

Однак тепер у другому випадку нерівність (3) виконується при усіх $x$ з області визначення.

Таким чином, нерівність (3) рівносильна на своїй області визначення наступній сукупності:

$$\left\{\begin{matrix}x+\frac{1}{2}\geq 0, \\\left(\sqrt{x+2}\right)^{2}<\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2};\end{matrix} x+\frac{1}{2}<0. \right.$$

З першої системи знаходимо $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{\sqrt{7}}{2}$, а з нерівності $x+\frac{1}{2}<0$ отримаємо $x<-\frac{1}{2}$. Об’єднуючи ці значення $x$, отримаємо $x<\frac{\sqrt{7}}{2}$.

3) Залишається розв’язати систему нерівностей

$$\left\{\begin{matrix}x<\frac{\sqrt{7}}{2} , \\ x\geq -2. \end{matrix}\right.$$

Отримаємо $\left[-2;\right.\frac{\sqrt{7}}{2})$ – розв’язання нерівності (3).

Зауваження. Під час отримання певних навичок розв’язання ірраціональних нерівностей можна не розчленовувати розв’язання на три етапи, а одразу зводити дану нерівність до системи або сукупності систем більш простих нерівностей. Так нерівність

$$\sqrt{x+2}<x+\frac{1}{2} (приклад 2)$$

можна замінити рівносильно їй системо.

$$\left\{\begin{matrix}x+2\geq 0,\\x+\frac{1}{2}>0,\\x+2<\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2},\end{matrix}\right.$$

а нерівність $\sqrt{x+2}>x+\frac{1}{2}$ (приклад 3) – сукупність систем

$$\left\{\begin{matrix}x+2\geq 0,\\x+\frac{1}{2}>0,\\x+2>\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2},\end{matrix} \left\{\begin{matrix}x+2\geq 0,\\x+\frac{1}{2}<0.\end{matrix}\right. \right.$$

Так ми будемо розв’язувати наступні приклади.

Приклад 4. Розв’яжемо нерівність.

$$\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\geq 1. (4)$$

Розв’язання. Знайдем область визначення нерівності (4).

З системи

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{3x}\geq 0, \\2x+1\geq 0.\end{matrix}\right.$$

отримаємо $x\geq 0.$

Перш ніж піднести обидві частини нерівності (4) до квадрату перепишемо її наступним чином:

$$\sqrt{3x}\geq 1+\sqrt{2x+1}.$$

На множині $x\geq 0$ обидві частини нерівності невід’ємні, отже, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням. Маємо $\left(\sqrt{3x}\right)^{2}\geq \left(1+\sqrt{2x+1}\right)^{2}$, або $2\sqrt{2x+1}\leq x-2$. Ця нерівність (а з нею і нерівність (4) з урахуванням області визначення$ x\geq 0$) рівносильна системі нерівностей

$$\left\{\begin{matrix}x\geq 0, \\x-2\geq 0, \\\left(2\sqrt{2x+1}\right)^{2}\leq \left(x-2\right)^{2}.\end{matrix}\right.$$

Розв’язання цієї системи: $x\geq 12$.

Тож, $\left[12;\right.+\infty )$ – розв’язання нерівності (4).

Приклад 5. Розв’яжемо нерівність.

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8. (5)$$

Розв’язання. Знайдемо область визначення нерівності (5).

З системи

$$\left\{\begin{matrix}2x+5\geq 0,\\x-1\geq 0\end{matrix}\right.$$

отримаємо$ x\geq 1$.

 На множині $x\geq 1$ обидві частини нерівності (5) невід’ємні. Тому, піднісши обидві його часини до квадрату, отримаємо рівносильну нерівність

$$2x+5+2\sqrt{2x^{2}+3x-5}+x-1>64,$$

або

$$2\sqrt{2x^{2}+3x-5}>-3x+60.$$

З того, що на множині $x\geq 1$ права частина цієї нерівності може приймати які невід’ємні, так і від’ємні значення, то доведеться розглянути два випадки, тобто розв’язати сукупність систем нерівностей

$$\left\{\begin{matrix}x\geq 1, \\-3x+60\geq 0, \\\left(2\sqrt{2x^{2}+3x-5}\right)^{2}>-3x+60;\end{matrix} \left\{\begin{matrix}x\geq 1, \\-3x+60<0. \end{matrix}\right.\right.$$

Після спрощення отримаємо:

$$ \left\{\begin{matrix}1\leq x\leq 20, \\(x-10)(x-362)<0. \end{matrix}\right. x>20. $$

З цієї сукупності знаходимо $10<x\leq 20;x>20.$ Об’єднавши ці розв’язання, отримаємо$ x>10$. (10;$ +\infty )$ – розв’язання нерівності (5).

 Приклад 6. Розв’яжемо нерівність.

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^{2}}-\frac{3}{4}}. (6)$$

Розв’язання. Покладемо $y=\frac{2}{x}$. Тоді нерівність (6) матиме вигляд:

$$y-\frac{1}{2}>\sqrt{y^{2}-\frac{3}{4}}.$$

Ця нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\left\{\begin{matrix}y^{2}-\frac{3}{4}\geq 0, \\y-\frac{1}{2}>0, \\\left(y-\frac{1}{2}\right)^{2}>\left(\sqrt{y^{2}-\frac{3}{4}}\right)^{2},\end{matrix}\right.$$

розв’язавши яку знаходимо $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq y<1.$ Залишилося розв’язати системи нерівностей $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq \frac{2}{x}<1$, звідки $2<x\leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

 Приклад 7. Розв’яжемо нерівність.

$$\frac{1}{4}x>\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right). (7)$$

Розв’язання. Областю визначення нерівності (7) є множина $-1\leq x\leq 1$.

 Спроба розв’язати нерівність (7), як у попередніх прикладах, шляхом піднесення обох частин нерівності до квадрату, наштовхуємося на значні труднощі. Вчинимо інакше.

 Розглянемо вираз $φ\left(x\right)=\sqrt{1+x}+1.$ З того, що $φ\left(x\right)>0$ за будь-яких допустимих значеннях $x$, виходить, що якщо обидві частини нерівності (7) помножити на$ φ\left(x\right)$ і зберегти знак нерівності (7), отримається рівносильна йому нерівність

$$\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)>\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right).$$

 Далі маємо:

$$\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)>\left(\left(\sqrt{1+x}\right)^{2}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right),$$

$$\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)>x\left(\sqrt{1-x}+1\right),$$

$$x\left(\sqrt{1+x}+1-4\left(\sqrt{1-x}+1\right)\right)>0,$$

$$x\left(\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3\right)>0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\left\{\begin{matrix}-1\leq x\leq 1, \\x>0, \\\sqrt{1+x}>4\sqrt{1-x}+3;\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}-1\leq x\leq 1, \\x<0, \\\sqrt{1+x}<4\sqrt{1-x}+3;\end{matrix}\right.$$

яка в свою чергу, рівносильна сукупності:

$$\left\{\begin{matrix}0<x\leq 1, \\\sqrt{1+x}>4\sqrt{1-x}+3;\end{matrix} \left\{\begin{matrix}-1\leq x<0, \\\sqrt{1+x}<4\sqrt{1-x}+3.\end{matrix} \right.\right.$$

Ясно, що при $0<x\leq 1$ друга нерівність першої системи не має розв’язків, отже, перша система розв’язків не має. Ясно також, що при $-1\leq x<0 $друга нерівність другої системи вірна, отже, друга система виконується при$-1\leq x<0$.

 В результаті отримаємо $\left[-1;\right.0)$ – розв’язання нерівності (7).

Приклад 8. Розв’яжемо нерівність.

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}. (8)$$

Розв’язання. Областю визначення нерівності (8) є множина $2\leq x\leq 3.$

Перед тим, як підносити обидві частини нерівності (8) до квадрату, необхідно переконатися в тому, що обидві її частини невід’ємні.

Однак це виявляється не так.

Дійсно, з того, що $2\leq x\leq 3$, виходить$ 1\leq x-1\leq 2$ і $3\leq 6-x\leq 4$.

Але $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}>0$. Таким чином, при усіх значеннях$ x$ і відрізка $2\leq x\leq 3$ нерівність (8) виконується. Тож, $2\leq x\leq 3$ – розв’язок нерівності (8).

### **Задачі для самостійного розгляду**

1. $\sqrt{3x-2}>1.$

Відповідь: $\left(1;+\infty \right).$

2. $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}}\geq 2.$

Відповідь: $\left[2,6;4)\right..$

3. $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}}\leq 3.$

Відповідь: $\left(-\infty ;\left.0,5\right]∪\right.\left[0,68;+\infty )\right.$

4. $\sqrt{2x+10}<3x-5.$

Відповідь: $\left(3;+\infty \right).$

5. $\sqrt{(x-3)(x+1)}>3\left(x+1\right).$

Відповідь: $\left(-\infty ;-1\right).$

6. $\sqrt{(x+4)(2x-1)}>2\left(x+4\right).$

Відповідь: $\left[0,5;+\infty )\right..$

7. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x.$

Відповідь: $\left(-\infty ;\left.-2\right]∪\right.\left[5;5\frac{5}{13})\right.$.

8. $\sqrt{x^{2}-x-12}<x.$

Відповідь: $\left[4;+\infty )\right.$.

9. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^{2}}}{x+3}>0.$

Відповідь: $\left(-3;1\right).$

10. $\sqrt{9x-20}<x.$

Відповідь: $\left[\frac{20}{9};4)\right.∪\left(5;+\infty \right).$

11. $\sqrt{x^{2}-4x}>x-3.$

Відповідь: $\left(-\infty ;0\right)∪\left(4,5;+\infty \right).$

12. $\sqrt{3x^{2}-22x}>2x-7.$

Відповідь: $\left(-\infty ;\left.0\right]\right.$

13. $\sqrt{x^{2}-5x+6}\leq x+4.$

Відповідь: $\left[-\frac{10}{13};2\right]∪\left[5;+\infty )\right.$.

14.$ \sqrt{2x^{2}+7x+50}\geq x-3.$

Відповідь: $\left(-\infty ;+\infty \right)$.

15. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\leq 1.$

Відповідь: $(3;+\infty )$.

16. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\geq 2.$

Відповідь: $\left[4;4\frac{9}{16}\right]$.

17. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\leq 1.$

Відповідь: $∅.$

18.$ \sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x+5}<0.$

Відповідь: $\left[4;5)\right.$.

19. $2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\geq 2\sqrt{x-3}.$

Відповідь: $\left[3;\frac{15+16\sqrt{15}}{15}\right]$.

20. $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}.$

Відповідь: $∅.$

# **Література**

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: «ABF», 1995 – 352с.

2. Вересова Е.Е. и др., Практикум по решению математических задач: Учебю пособие для пед. ін-тов. Е.Е Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. – М.: Просвещение, 1979. – 240с.

3. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас. Ред. З.І.Слєпкань. – Харків, «Гімназія»,2014

4. Теманов С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1970. – 864с.

5. Фадеев Д.К., Сомнский И.С. Алгебра для самообразования. 2-е изд., исправ. – М.:Наука, 1964. – 532 с.

6. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.:Наука, 1972. – 592.

7. Антонов Н.П., Выгодский М.Я. и др. Пособие для самообразования. – м.:Физматгиз, 1960. – 532с.

**Інтернет-ресурси**

1.<https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/7mihalevich_elementarna_matematika_algebra_ch2/7.htm>

2. <https://cubens.com/uk/handbook/equations-and-inequalities/irrational-equations>