**Тотожні перетворення ірраціональних виразів. Ірраціональні рівняння. Ірраціональні нерівності**

**ПЛАН**

[1. Тотожні перетворення ірраціональних виразів. 3](#_Toc38627750)

[Задачі для самостійного розгляду 8](#_Toc38627751)

[2. Ірраціональні рівняння 10](#_Toc38627752)

[1. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня. 11](#_Toc38627753)

[2. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом введення нових змінних. 15](#_Toc38627754)

[3. Штучні прийоми розв’язання ірраціональних рівнянь 21](#_Toc38627755)

[4. Системи ірраціональних рівнянь. 21](#_Toc38627756)

[Задачі для самостійного розгляду 23](#_Toc38627757)

[3. Ірраціональна нерівності 25](#_Toc38627758)

[Задачі для самостійного розгляду 31](#_Toc38627759)

[Література 34](#_Toc38627760)

# 1. Тотожні перетворення ірраціональних виразів.

Алгебраїчний вираз, що містить операції добування кореня зі змінної або піднесення змінної до раціонального степеня, що не є цілим числом, називається ірраціональним відносно змінної.

Визначення арифметичного кореня. Якщо і то існує лише одне невід’ємне число таке, що виконується рівність Це число називається арифметичним коренем -го з невід’ємного числа і позначається

З вище сказаного випливає, що рівність є правильною, тоді як рівності або є неправильними.

Якщо – непарне число, більше 1, і , тоді під розуміють таке невід’ємне число , що .

Якщо то:

1. .

Ця властивість розповсюджується на добуток будь-якого числа множників, наприклад

2. якщо .

Зауваження. Якщо і , то властивості 1 і 2 мають вигляд:

і .

3. наприклад

4. наприклад

5.

Зауваження. Якщо показники коренів – непарні числа, то властивості 1-5 виконуються і для , , і для .

Це одна важлива властивість арифметичного кореня: якщо число – пране число, тобто , то має місце тотожність наприклад

Означення степеня з раціональним показником.

1) Якщо

2) Якщо

3) Якщо

4) Якщо

Перерахуємо основні властивості степенів з довільним раціональним показником:

1.

2. .

3. .

4. .

5. і ,

Приклад 1. Спростити вираз

Розв’язання. Спочатку спростимо кожен з радикалів:

Після цього заданий вираз має вигляд:

Далі отримаємо:

Приклад 2. Спростити вираз

Розв’язання. Перемножимо спочатку третій і четвертий множники:

Отриманий результат помножимо на другий множник:

Цей результат помножимо на перший множник:

Тож,

Приклад 3. Спростити вираз

Розв’язання. За властивістю 5 отримуємо . Але а тому

Приклад 4. Спростити вираз .

Розв’язання. Вираз спроститься, якщо виявиться, що під знаком кореня знаходиться повний квадрат різниці якихось двох чисел. Уявимо як подвоєний добуток двох чисел, сума квадратів яких буде дорівнювати 27, тобто . Таким чином

тож з того, що отримуємо, що .

Приклад 5. Спростити вираз

Розв’язання. Розмірковуючи так, які і в попередньому прикладу, запишемо підкореневий вираз у вигляді повного кубу різниці якихось двох чисел. Маємо:

Таким чином,

Приклад 6. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу

Розв’язання. Помноживши чисельник і знаменник дробу на «неповний квадрат» суми чисел і 1, отримаємо:

Приклад 7. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу

Розв’язання. Звільнимося від в знаменнику, для чого помножимо чисельник та знаменник дробу на вираз, що є спряженим до знаменника:

Тепер звільнимося від в знаменнику:

Приклад 8. Обчислити суму .

Розв’язання. Покладемо і піднесемо до третього степеня обидві частини цієї рівності. Отримаємо:

(

або де

Таким чином, отримаємо

З того, що випливає що рівність виконується тільки при

Тож,

Приклад 9. Звести вираз

до вигляд, що не містить знаки кореня і модуля.

Розв’язання.

Точки розбивають числову пряму на проміжки

Розглянемо заданий вираз на кожному з проміжків.

При маємо:

При маємо:

При маємо:

Тож,

### **Задачі для самостійного розгляду**

Знайти значення наступних виразів:

1. .

Відповідь: 39.

2. .

Відповідь: .

3. .

Відповідь: 10.

4. .

Відповідь: .

5.

Відповідь:

6. при .

Відповідь:

Спростити вирази:

7.

Відповідь:

8.

Відповідь:

9. (

Відповідь: 3.

10. .

Відповідь:

11.

Відповідь: .

12.

Відповідь: .

13.

Відповідь:

14.

Відповідь:

15.

Відповідь:

Звільнитися від ірраціональності в знаменниках дробів.

16.

Відповідь:

17.

Відповідь:

18.

Відповідь:

19.

Відповідь:

20.

Відповідь:

# **2. Ірраціональні рівняння**

Означення. Ірраціональними називають рівняння, в яких невідома величина розміщена під знаком кореня або під знаком операції піднесення до дробового степеня. Такі рівняння розглядають над полем дійсних чисел.

В окремих випадках, не розв’язуючи дане ірраціональне рівняння, можна встановити, що воно не має коренів. Наприклад, рівняння не має коренів, бо арифметичний корінь не може бути від’ємним.

Рівняння не має розв’язків, бо обидва доданки є арифметичними коренями, а тому не можуть бути від’ємними. А сума двох невід’ємних чисел дорівнює нулю лише тоді, коли кожен доданок дорівнює нулю. Одночасно ж вирази і нулю дорівнювати не можуть.

Основними методами розв’язування ірраціональних рівнянь:

1) піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня;

2) введення нових (допоміжних) змінних.

Але іноді доводиться використовувати і штучні прийоми розв’язання ірраціональних рівнянь.

Зауваження. Під час розв'язуванні ірраціональних рівнянь необхідно визначати область допустимих значень (ОДЗ). Крім того, варто робити перевірку, підставляючи знайдені значення невідомих у вихідне рівняння, оскільки при піднесенні обох частин початкового рівняння до парного степеня дістаємо рівняння, що є результатом не тільки рівняння , але і рівняння , оскільки і , і . Так, наприклад, візьмемо рівняння

Піднісши обидві частини цього рівняння до квадрата, дістанемо

Коренями цього рівняння є числа Однак після перевірки переконуємось, що є коренем рівняння , а є побічним коренем.

В залежності від виду знайдених розв’язків (прості чи складні), а також в залежності від способу розв’язання рівнянь може бути обраний той чи інший спосіб перевірки.

**1. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня.**

Приклад 1. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

Після піднесення до квадрату останнього рівняння отримаємо:

звідки знаходимо

Перевірка. Знайдені корені перевірити безпосередньо підстановкою до рівняння.

1)

Таким чином, є коренем заданого рівняння.

2)

Тобто, – сторонній корінь. Таким чином, лише є коренем заданого рівняння.

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

Після піднесення до квадрату останнього рівняння отримаємо:

звідки знаходимо

Перевірка. Перевіряти знайдені корені підстановкою до рівняння не доцільно. Вчинимо наступним чином. Знайдемо область визначення рівняння. З системи нерівностей:

знаходимо, що цією областю є промінь . Визначимо, чи належать знайдені корені цьому променю. Маємо:

Таким чином, , тобто належить цьому променю, а отже є коренем рівняння.

Таким чином, , тобто не належить цьому променю, а отже не є коренем рівняння.

Повернемося до . Визначимо знак різниці, що знаходиться в правій частині рівняння (2) Маємо

Таким чином, є коренем рівняння (2) А з того, що рівняння і рівняння рівносильні, то коренями рівняння (2) є лише корені рівняння (1). Тож, коренем рівняння є .

Приклад 3. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Перетворимо це рівняння до виду

і піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрату:

або З останнього рівняння знаходимо .

Перевірка. Перший зі знайдених коренів не важко перевірити підстановкою до вихідного рівняння. Така перевірка показує, що Спроба перевірити таким чином інший корінь призводить до громіздких обчислень. Можна, однак, зробити по-іншому. З’ясуємо, чи є коренем рівняння (2). Зауважимо, що при цьому значенні ліва частина рівняння (2) невід’ємна, а права – від’ємна. Отже, не є коренем рівняння (2). Але рівняння (2) наслідок рівняння (1), тоді тим більше не є коренем рівняння (2). Тому коренем рівняння (2) є .

Приклад 4. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

Піднесемо до третього степеня обидві частини цього рівняння:

Після зведення подібних членів отримаємо рівняння

звідки , і далі

, або

Таким чином, задача зводиться до розв’язання сукупності:

звідки знаходимо , .

Перевірка. Підстановкою знайдених значень в задане рівняння переконуємося, що всі вони є його коренями.

Приклад 5. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня.

і далі 3. Скориставшись рівнянням (1), замінимо вираз на

або

Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня.

і далі

звідки знаходимо

Перевірка. Підстановку знайдених значень в задане рівняння (1) переконуємо, що коренем є лише

**2. Розв’язання ірраціональних рівнянь методом введення нових змінних.**

Приклад 6. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Піднесення обох частин рівняння (1) до квадрату привело б до громіздкого рівняння. В той же час, якщо проявити деяку спостережливість, можна помітити, що рівняння (1) легко зводиться до квадратного. Дійсно, помноживши обидві його частина на 2, отримаємо:

і далі

Поклавши отримаємо звідки

Отже, рівняння (1) рівносильне наступній сукупності рівнянь:

З першого рівняння цієї сукупності знаходимо

Друге рівняння коренів не має.

Перевірка. З того, що сукупність рівнянь рівносильна рівнянню (1), причому друге рівняння цієї сукупності коренів не має, то знайдені корені можна перевірити підстановкою до рівняння . Ця підстановка показує, що обидва знайдених значення є коренями цього рівняння, а отже, і заданого рівняння (1).

Приклад 6. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Областю визначення рівняння (1) є промінь . В цій області вираз можна представити наступним чином:

З того, що , рівняння (1) далі можна переписати так:

або

тобто

Поклавши , отримаємо квадратне рівняння

з якого знаходимо . Таким чином, задача звелася до розв’язання сукупності рівнянь:

З першого рівняння сукупність знаходимо друге рівняння сукупності розв’язання не має.

Перевірка. Легко показати, що є коренем рівняння Але це рівняння рівносильне рівнянню (1), отже є коренем і рівняння (1).

Інколи при розв’язанні ірраціональних рівнянь видається зручним ввести дві нові допоміжні змінні.

Приклад 8. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Покладемо

Тоді рівняння (1) приймає вид Але для знаходження значень нових змінних одного рівняння недостатньо. Піднісши до четвертого степеня обидві частини кожного рівняння системи, отримаємо:

Складемо рівняння останньої системи:

Таким чином, для знаходження та , ми маємо наступну симетричну систему рівнянь:

Розв’язавши цю систему, знаходимо:

Таким чином, розв’язання рівняння (1) звелося до розв’язання наступної сукупності системи рівнянь:

Розв’язавши цю сукупність, знаходимо

Перевірка. Простіше за все перевірити знайдені корені підставивши їх безпосередньо в задане рівняння. Зробивши це, переконаємося, що обидва знайдених значення є коренями заданого рівняння.

Зауваження. Прийом, що використано під час розв’язання рівняння (1), міг би бути використаний і під час розв’язання деяких інших рівнянь із розглянутих вище. Так, розв’язуючи рівняння , можна було покласти:

Тоді ми б прийшли до системи рівнянь

Цей прийом можна було використати і до розв’язання рівняння з прикладу 1.

Приклад 9. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Поклавши

прийдемо до рівняння . Перемножимо праві частині рівняння системи (2)

Отриманий результат приводить до іншого рівняння відносно нових змінних: Розв’язавши систему

знаходимо:

Таким чином, ми приходимо до сукупності систем рівнянь. З цієї сукупності випишемо тільки систему, що відповідає додатним значенням ( система, що відповідає від’ємним значенням , розв’язків немає, тому її опускаємо):

Розв’яжемо друге рівняння системи (3). Піднесемо обидві його частини до квадрату: і далі

Тепер піднесемо до квадрату обидві частини рівняння (4):

і далі 752

З останнього рівняння знаходимо .

Перевірка. Ясно, що не задовольняє рівнянню (4), а отже, і другому рівнянню системи (3). Перевіримо . Тож, при , рівняння (5), (4) і друге рівняння системи (3) рівносильні, то – корінь другого рівняння системи (3). Тепер ми повинні переконатися в тому, що знайдене значення задовольняє і першому рівнянню системи (3) (тільки в цьому випадку ми можемо вважати це значення розв’язком системи 3). Зведемо це рівняння до рівносильного, але більш простого. Маємо:

Значення задовольняє останньому рівнянню, а разом з тим і першому рівнянню (3). Тож, – розв’язання системи (3), а отже, і рівняння (1).

Приклад 10. Розв’яжемо рівняння.

Розв’язання. Покладемо

Тоді рівняння (1) має Для отримання другого рівняння відносно нових змінних піднесемо обидві частини першого рівняння системи (2) до п’ятого степеня, а другого – до четвертого степеня. Отримаємо:

звідки Таким чином, для знаходження ми маємо наступну систему рівнянь:

звідки

З другого рівняння системи (3) знаходимо Розділивши многочлен на двочлен , отримаємо в частці

Таким чином, система (3) рівносильна сукупності систем

З першої системи знаходимо

Друга система більш складна. Під час її розв’язання необхідно врахувати наступне. З того, що , то

Оскільки то тож Ясно, що рівняння

не має додатних коренів і тим більше таких коренів, які задовольняли б нерівності

Тож, єдине розв’язання системи (3) і нам залишається розв’язати таку систему:

Покладемо

тоді система має вигляд:

З цієї системи знаходимо. Тоді, звідки

Перевірка. Перевірити такі значення підстановкою в задане рівняння (1), звісно, складно. Можна спробувати виконати перевірку доведенням рівносильних рівнянь, отриманих на всіх етапах розв’язку рівняння (1). Аналізуючи ці рівняння, приходимо до висновку, що знайдені значення є коренями рівняння (1).

**3. Штучні прийоми розв’язання ірраціональних рівнянь**

Приклад 11. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз

спряжений до виразу .

Отже, якщо

то рівняння (1) має вид

або

Склавши рівняння (1) і (2), прийдемо до рівняння

Розв’язуючи рівняння (21) методом піднесення до квадрату, отримаємо:

і далі , звідки

Перевірка. По черзі підставляючи знайдені значення і рівняння (1), переконаємося, що йому задовольняє тільки значення . Таким чином, єдиний корінь рівняння (1).

**4. Системи ірраціональних рівнянь.**

Приклади 12. Розв’яжемо системи рівнянь

Розв’язання. Покладемо . Тоді перше рівняння системи (1) матиме вигляд , звідки знаходимо

Таким чином, розв’язання системи (1) зводиться до розв’язання наступної системи:

Піднесемо до квадрату обидві частини першого рівняння системи (2), і звільнившись від знаменника, приходимо до системи

з якої знаходимо:

Перевірка. За умови, що , система (3) рівносильна системі (2). В свою чергу система (2) рівносильна системі (1). Таким чином, розв’язання системи (3) є також розв’язком системи (1). Тож, розв’язками системи (1) є пари (2;1) і (1;.

Приклад 13. Розв’яжемо систему рівнянь

Розв’язання. З того, що а

то система (1) матиме такий вигляд:

Ця система рівносильна наступній сукупності систем:

Покладаючи отримаємо сукупність систем

Розв’язання першої системи сукупності не викликає труднощів. Під час розв’язання другої системи цієї сукупності слід врахувати, що , тобто

Таким чином, з сукупності знаходимо:

звідки

Перевірка. Перші два розв’язки легко перевірити безпосередньо підстановкою в систему (1). Однак перевірити таким же чином третій розв’язок непросто. Але, як не складно переконатися, сукупність (3) рівносильна системі (2), а система (2) рівносильна заданій системі (1). Тому розв’язання сукупності (3) є розв’язанням і системи (1).

### **Задачі для самостійного розгляду**

Розв’язати рівняння

1.

Відповідь: 2; 3.

2.

Відповідь: 7; 8.

3.

Відповідь: 2.

4.

Відповідь: розв’язків немає.

5.

Відповідь: 0.

6.

Відповідь: -2;

7.

Відповідь:

8.

Відповідь: 0; 2.

9.

Відповідь: 0; 0,5

10.

Відповідь: 1,25.

11.

Відповідь: -1, 1.

12.

Відповідь: 5.

13.

Відповідь: -37; 6.

14.

Відповідь: 2.

15.

Відповідь: 15.

16.

Відповідь: -2; 5.

17.

Відповідь: 1.

Розв’язати системи рівнянь.

18.

Відповідь: (1;4).

19.

Відповідь: (9;4).

20.

Відповідь:

21.

Відповідь: (3;1).

22.

Відповідь: (6;5).

# **3. Ірраціональна нерівності**

Під час розв’язання ірраціональних нерівностей використовуються ті ж самі прийоми, що і під час розв’язання ірраціональних рівнянь: піднесення обох частин нерівності до одного і того ж натурального степеня, введення нових (допоміжних змінних) тощо. Виконувати розв’язання можна, дотримуючись, наприклад, наступного плану:

1) Знайти область визначення заданої нерівності.

2) Користуючись реченнями про рівносильність рівностей, розв’язати нерівність.

3) Зі знайдених розв’язків відібрати значення змінної, що належать області визначення заданої нерівності.

Приклад 1. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. 1) Область визначення нерівності (1):

2) З того, що на множині обидві частини нерівності (1) піднести до квадрату отримаємо , або Ця нерівність рівносильна нерівності (1) в області її визначення. З останньої нерівності знаходимо

3) Зі знайденої сукупності розвязаннями нерівності (1) будуть лиш ті значення , які належать області визначення нерівності (1), тобто , що є розв’язками наступної системи:

З цієї системи знаходимо – розв’язки нерівності (1).

Приклад 2. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. 1) Область визначення нерівності (2):

2) На множні ліва частина нерівності (2) невід’ємна, а права частина може приймати як невід’ємні, так і від’ємні значення. Тому необхідно розглянути два випадки:. В першому випадку можна обидві частини нерівності (2) піднести до квадрату (можна в тому сенсі, що отримається рівносильна нерівність), а у другому цього робити не можна, та і не потрібно, тому що зрозуміло, що при отримається, що ліва частина нерівності (2) невід’ємна, а права від’ємна, а це суперечить сенсу нерівності (2). Отже, нерівність (2) рівносильна на своїй області визначення наступній системі:

З цієї системи заходимо

2) Залишається з розв’язань відібрати ті значення , що належать множині , тобто розв’язати систему нерівностей

Отримаємо ( – розв’язання нерівності (2).

Приклад 3. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. 1) Область визначення нерівності (2):

2) Як у попередньому прикладі, необхідно розглянути два випадки:.

Однак тепер у другому випадку нерівність (3) виконується при усіх з області визначення.

Таким чином, нерівність (3) рівносильна на своїй області визначення наступній сукупності:

З першої системи знаходимо , а з нерівності отримаємо . Об’єднуючи ці значення , отримаємо .

3) Залишається розв’язати систему нерівностей

Отримаємо – розв’язання нерівності (3).

Зауваження. Під час отримання певних навичок розв’язання ірраціональних нерівностей можна не розчленовувати розв’язання на три етапи, а одразу зводити дану нерівність до системи або сукупності систем більш простих нерівностей. Так нерівність

можна замінити рівносильно їй системо.

а нерівність (приклад 3) – сукупність систем

Так ми будемо розв’язувати наступні приклади.

Приклад 4. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. Знайдем область визначення нерівності (4).

З системи

отримаємо

Перш ніж піднести обидві частини нерівності (4) до квадрату перепишемо її наступним чином:

На множині обидві частини нерівності невід’ємні, отже, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням. Маємо , або . Ця нерівність (а з нею і нерівність (4) з урахуванням області визначення) рівносильна системі нерівностей

Розв’язання цієї системи: .

Тож, – розв’язання нерівності (4).

Приклад 5. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. Знайдемо область визначення нерівності (5).

З системи

отримаємо.

На множині обидві частини нерівності (5) невід’ємні. Тому, піднісши обидві його часини до квадрату, отримаємо рівносильну нерівність

або

З того, що на множині права частина цієї нерівності може приймати які невід’ємні, так і від’ємні значення, то доведеться розглянути два випадки, тобто розв’язати сукупність систем нерівностей

Після спрощення отримаємо:

З цієї сукупності знаходимо Об’єднавши ці розв’язання, отримаємо. (10; – розв’язання нерівності (5).

Приклад 6. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. Покладемо . Тоді нерівність (6) матиме вигляд:

Ця нерівність рівносильна системі нерівностей

розв’язавши яку знаходимо Залишилося розв’язати системи нерівностей , звідки .

Приклад 7. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. Областю визначення нерівності (7) є множина .

Спроба розв’язати нерівність (7), як у попередніх прикладах, шляхом піднесення обох частин нерівності до квадрату, наштовхуємося на значні труднощі. Вчинимо інакше.

Розглянемо вираз З того, що за будь-яких допустимих значеннях , виходить, що якщо обидві частини нерівності (7) помножити на і зберегти знак нерівності (7), отримається рівносильна йому нерівність

Далі маємо:

Ця нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

яка в свою чергу, рівносильна сукупності:

Ясно, що при друга нерівність першої системи не має розв’язків, отже, перша система розв’язків не має. Ясно також, що при друга нерівність другої системи вірна, отже, друга система виконується при.

В результаті отримаємо – розв’язання нерівності (7).

Приклад 8. Розв’яжемо нерівність.

Розв’язання. Областю визначення нерівності (8) є множина

Перед тим, як підносити обидві частини нерівності (8) до квадрату, необхідно переконатися в тому, що обидві її частини невід’ємні.

Однак це виявляється не так.

Дійсно, з того, що , виходить і .

Але . Таким чином, при усіх значеннях і відрізка нерівність (8) виконується. Тож, – розв’язок нерівності (8).

### **Задачі для самостійного розгляду**

1.

Відповідь:

2.

Відповідь:

3.

Відповідь:

4.

Відповідь:

5.

Відповідь:

6.

Відповідь:

7.

Відповідь: .

8.

Відповідь: .

9.

Відповідь:

10.

Відповідь:

11.

Відповідь:

12.

Відповідь:

13.

Відповідь: .

14.

Відповідь: .

15.

Відповідь: .

16.

Відповідь: .

17.

Відповідь:

18.

Відповідь: .

19.

Відповідь: .

20.

Відповідь:

# **Література**

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: «ABF», 1995 – 352с.

2. Вересова Е.Е. и др., Практикум по решению математических задач: Учебю пособие для пед. ін-тов. Е.Е Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. – М.: Просвещение, 1979. – 240с.

3. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас. Ред. З.І.Слєпкань. – Харків, «Гімназія»,2014

4. Теманов С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1970. – 864с.

5. Фадеев Д.К., Сомнский И.С. Алгебра для самообразования. 2-е изд., исправ. – М.:Наука, 1964. – 532 с.

6. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.:Наука, 1972. – 592.

7. Антонов Н.П., Выгодский М.Я. и др. Пособие для самообразования. – м.:Физматгиз, 1960. – 532с.

**Інтернет-ресурси**

1.<https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fmib/7mihalevich_elementarna_matematika_algebra_ch2/7.htm>

2. <https://cubens.com/uk/handbook/equations-and-inequalities/irrational-equations>