Текстові задачі

Укладачі:

к.п.н., доцентка Кузьмич Л.В.,

к.п.н., доцент Таточенко В.І.

ЗМІСТ

ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ

Загальні відомості про текстові задачі

Текстові задачі, що містять нематематичні поняття, називають *прикладними* задачами. Але такі задачі можуть бути розв'язані математичними методами, як і абстрактні математичні задачі про числа, фігури, рівняння, функції та багато інших.

Текстові задачі мають досить велике значення. З давніх пір задачі відіграють величезну роль у навчанні. Розв'язування задач виступає і як мета, і як засіб навчання. Уміння ставити і виконувати задачі є одним з основних показників рівня розвитку здобувачів освіти, відкриває їм шлях оволодіння новими знаннями: знайомиться з новою ситуацією, описаної для розв'язування задачі і т. д. Інакше, при розв'язуванні текстових задач людина набуває математичні знання, підвищує свою математичну освіту. При оволодінні методом розв'язування певного класу задач у людини формується вміння виконувати такі завдання, а при достатньому тренуванні - і навик, що теж підвищує рівень математичної освіти.

При розв'язуванні прикладних задач здобувач освіти навчається створювати математичні моделі, застосовувати математичні знання до практичних потреб, готується до практичної діяльності в майбутньому, до виконання завдань, висунутих практикою, повсякденним життям. При моделюванні різних процесів під час розв'язування прикладних задач передбачається, що функції, геометричні фігури, вирази, рівняння та їх системи, діаграми тощо будуть використовуватися як математичні моделі.

Моделлю називають спеціально створений об'єкт, який відображає властивості досліджуваного об'єкта (від французького слова modele — копія, зразок). Зменшені моделі літака, будинку, автомобіля — приклади моделей.

Математична модель — це система математичних співвідношень, яка наближено в абстрактній формі описує досліджуваний об'єкт, процес або явище.

Математичні моделі створюють з математичних понять і відношень: геометричних фігур, чисел, виразів тощо. Математичними моделями здебільшого бувають функції, рівняння, нерівності, їх системи.

Процес побудови математичної моделі та подальше її застосування для розв'язування конкретних задач називається *математичним моделюванням*.

Розв'язування текстових задач привчає виділяти посилки і укладання, дані і шукані, знаходити спільне та особливе в даних, зіставляти і протиставляти факти. При розв'язуванні математичних завдань, як вказував А.Я. Хинчин, виховується правильне мислення та здобувачі освіти привчаються перш за все до повноцінної аргументації.

Текстові задачі використовуються як дуже ефективний засіб засвоєння здобувачами освіти понять, методів, взагалі математичних теорій, як найбільш дієвий засіб розвитку мислення здобувачів освіти, як універсальний засіб математичного виховання і незамінний засіб прищеплення учням умінь і навичок у практичних застосуваннях математики. Розв'язування задач добре служить досягненню всіх тих цілей, які ставляться перед навчанням математики. Перш за все завдання виховує своєї фабулою, текстовим змістом.

Виховну роль відіграє не тільки фабула задачі, але і весь процес навчання виконанню текстових задач. Правильне розв'язування текстових задач без будь-яких логічних натяжок виховує в здобувачів освіти чесність і правдивість. Розв'язування задач вимагає від здобувачів освіти наполегливості у подоланні труднощів і мужності. При виконанні завдань формуються вміння і навички розумової праці: посидючість, уважність, акуратність, послідовність розумових дій. Розв'язування задач розвиває також почуття відповідального ставлення до навчання.

Прикладну задачу доцільно розв'язувати за таким алгоритмом:

1) формулюємо задачу мовою математики, тобто складаємо математичну модель задачі;
2) розв'язуємо відповідну математичну задачу, що утворилася;
3) аналізуємо відповідь і формулюємо її мовою початкової задачі.

У завданнях руху слід враховувати такі зауваження:

- По-перше, якщо тіла зустрічаються, то у момент зустрічі вони перебувають у одній точці простору.
- По-друге, якщо тіла почали рухатися одночасно, то часи їхнього руху однакові. А якщо одне з тіл почало рухатися на, скажімо, 1 годину пізніше за друге, то час руху другого тіла дорівнює t , а час руху першого тіла дорівнює (t -1), так як воно почало рухатися пізніше, отже, рухається протягом меншого часу

Загальний прийом розв'язування задач включає: знання етапів розв'язку, методів (способів) розв'язання, типів завдань, обґрунтування вибору способу розв'язання на підставі аналізу тексту задачі, а також володіння предметними знаннями: поняттями, визначеннями термінів, правилами, формулами, логічними прийомами й операціями.

До етапів розв'язування можна віднести:

1) аналіз тексту задачі;
2) переклад тексту на мову математики;
3) встановлення відношень між даними і питанням;
4) складання плану розв'язання задачі;
5) здійснення плану розв'язання;
6) перевірка й оцінка розв'язку задачі та запис відповіді.

Аналіз тексту задачі

Робота над текстом завдання включає семантичний, логічний і математичний аналіз.

1. Семантичний аналіз спрямований на забезпечення розуміння змісту тексту.
2. Логічний аналіз передбачає: вміння замінювати терміни їх визначеннями; виводити наслідки з наявних в умові задачі даних (поняття, процеси, явища).
3. Математичний аналіз включає аналіз умови і вимоги задачі.

Переклад тексту на мову математики - створення математичної моделі задачі

У результаті аналізу завдання текст задачі записують коротко з використанням умовної символіки. Після того як дані завдання спеціально вичленовані в короткому записі, слід перейти до аналізу відношень і зв'язків між цими даними. Для цього здійснюється переклад тексту на мову графічних моделей різного виду: креслення, схема, графік, таблиця, символічний малюнок, формула, рівняння та ін. Переклад тексту у форму моделі дозволяє виявити в ньому властивості й відношення, які часто важко виявити при читанні тексту. Виконане креслення (рисунок) за текстом задачі дозволяє фіксувати хід міркувань при її виконанні, що сприяє формуванню спільних підходів до розв'язування задачі. Тому до виконання креслень потрібно пред'являти вимоги: вони повинні бути наочними, чіткими, відповідати тексту завдання, на них повинні бути відображені по можливості всі дані, що входять в умову задачі; виділені на них дані і шукані повинні відповідати умові завдання і загальноприйнятим позначенням.

Встановлення відношень між даними і питанням

Реалізація цього компонента загального прийому вирішення завдань передбачає встановлення відношень між: даними умови, даними питання і питанням завдання. На основі аналізу умови і питання задачі визначається спосіб розв'язування задачі (обчислити, побудувати, довести), вибудовується послідовність конкретних дій. При цьому встановлюється достатність, недостатність або надмірність даних.

План розв'язання

На підставі виявлених відношень між величинами об'єктів вибудовується послідовність дій - план розв'язку.

Здійснення плану розв'язання включає:

1) розв'язання завдання - виконання дій;

2) запис розв’язання завдання;
3) виділення способів розв’язування.

Запис розв'язання задачі може здійснюватися у вигляді запису послідовних певних дій (з поясненнями і без) і у вигляді виразу (розгорнутого або скороченого).

Перевірка та оцінка виконання завдання

з точки зору адекватності плану розв’язку , способу розв’язання, що веде до результату: раціональність способу, чи немає простішого.

Різні типи завдань вимагають використання різних методів і прийомів розв’язування. Розв’язування задач у 5-6 класах здійснюється в основному трьома способами:

арифметичним, що складається в знаходженні значень невідомої величини за допомогою складання числового виразу (числової формули) і підрахунку результату;
алгебраїчним, при якому складається рівняння (система рівнянь), розв’язання якого/якої заснована на властивостях рівнянь/систем рівнянь;
комбінованим, який включає як арифметичний, так і алгебраїчний способи розв’язання.

Арифметичні способи розв'язування текстових завдань дозволяють розвивати уміння аналізувати задачні ситуації, будувати план розв’язання з урахуванням взаємозв'язків між відомими і невідомими величинами (з урахуванням типу задачі), тлумачити результат кожної дії в рамках умови завдання, перевіряти правильність розв’язку за допомогою складання і розв’язання зворотної задачі, тобто формувати і розвивати важливі загальнонавчальні вміння.

Арифметичні способи розв’язування текстових задач привчають дітей до перших абстракцій, дозволяють виховувати логічну структуру, можуть сприяти створенню сприятливого емоційного фону навчання, розвитку у школярів естетичного почуття стосовно до виконання завдань і вивчення математики, викликаючи інтерес спочатку до процесу пошуку розв’язання задачі, а потім і до досліджуваного предмета .

При розв’язуванні арифметичним способом форми запису можуть бути:

- питання з подальшою дією;
- дію з наступним поясненням;
- запис розв’язування з попереднім поясненням;
- числове розв’язування без будь-якого тексту.

При розв’язуванні задач *алгебраїчним* способом – складанням рівнянь або їх систем - істотне значення має вибір величини за невідоме, за допомогою якого можна виразити інші (чи частину інших) величини, що входять у завдання, і встановити залежність між даними задачі, яка дасть можливість скласти рівняння.

Для багатьох задач за невідоме можна приймати величину, яку потрібно знайти; тоді відповідь на питання завдання виходить без додаткових обчислень.

Розв’язування задач на складання рівнянь можна розбити на кілька етапів: вибір невідомих величин і їх позначення, запис вказаних співвідношень у вигляді рівнянь або систем рівнянь, розв’язання цих рівнянь або системи рівнянь з урахуванням області визначення (при цьому враховуються природні фізичні обмеження, які звичайно в тексті задач не наведено). Розглянемо розв’язування деяких типів задач.

При розв’язуванні текстової задачі часто використовують поєднання арифметичного і алгебраїчного способів розв’язання. У силу цього форма запису розв’язання кожної частини буде різною.

Вчитель математики повинен познайомитися з методикою викладання вчителя початкових класів, знати основні прийоми роботи цього вчителя і продовжувати застосовувати їх, не сильно відступаючи від того, чому діти вже навчені (складання схем, таблиць, короткої записи умови задачі і т.д.), доповнюючи, збагачуючи способи розв’язування задач своїми напрацюваннями.

У 5 класі доводиться не сильно відступаючи від початкової школи виправляти і приділяти багато уваги виконанню завдань на знаходження відношень між числами ("більше на ...", "менше на ...", "більше в ... раз", "менше в ... раз"). На допомогу приходять завдання типу:
намалюй будинок, в якої один поверх; намалюй будинок, у якого на два поверхи більше попереднього; намалюй будинок, у якого в два рази більше поверхів, ніж у попереднього; намалюй будинок, у якого в три рази менше поверхів, ніж у попереднього.

Діти справляються з таким завданням легко, але далеко не все правильно. А перевіряють вони по малюнку, який показує вчитель. Завдання подібного роду потрібно давати тривалий час, поки не зникнуть помилки, але вони не обов'язкові для всіх.

Також дуже важливо дітей вчити робити прикидку відповіді завдання. Складання короткої запису умови задачі, схем, малюнків і т.д. здобувачі освіти повинні супроводжувати поясненням і обговоренням в парах, біля дошки, індивідуально вчителю, але ні в якому разі не мовчки. Проговорюючи кожен свій крок, здобувачі освіти краще усвідомлюють умову задачі і знаходять у ньому все більше і більше знайомих їм відомих ситуацій, особливо, якщо це завдання складається з декількох елементарних завдань.

В 7 класі здобувачі середньої освіти розв'язують текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь у такій послідовності, яку можна застосовувати і для розв'язування більш складних задач, а саме [Істер]:

1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y);
2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;
3) розв'язати одержану систему;
4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові задачі, дати відповідь на запитання задачі;
5) записати відповідь.

Кожна складена система рівнянь з двома змінними (невідомими) є математичною моделлю текстової задачі. Є багато задач, які можна розв'язувати і за допомогою рівняння з однією змінною.

При обчисленнях важливо також пам'ятати про отримання результатів певної заданої точності. Для цього існують правила заокруглення.

Правила заокруглення

Основне правило заокруглення. При округленні необхідно записати число у вигляді десяткового дробу і округлити з необхідною точністю, дотримуючись правила: якщо перша цифра числа, що округлюється, дорівнює або більше 5, то число округляється у більшу сторону. Якщо перша цифра числа, що округлюється, менше 5, то число округляється в меншу сторону.

Додаткові способи заокруглення:

- Якщо потрібно заокруглити число з надлишком, воно заокруглюється у більшу сторону, незважаючи на основне правило.
- Якщо потрібно заокруглити число з недостачею, воно заокруглюється в меншу сторону, незважаючи на основне правило.

Умовний поділ текстових задач:

а) задачі «на рух»;
б) задачі «на відсотки»;
в) задачі «на сумісну роботу»;
г) задачі «на концентрацію, сплави, суміші»;

д) задачі «на числові залежності» (відшукання числа);

е) задачі на числові прогресії.

1. Задачі «на рух»

Основна формула задач на рух:

S = V t

S – відстань (пройдений шлях),
t – час руху,
V – швидкість (відстань, пройдену за одиницю часу).

Які ситуації можливі в задачах на рух?

Ситуація перша: два об'єкти починають рух одночасно назустріч один одному;
Ситуація друга: два об'єкти починають рухатись одночасно в протилежних напрямках;
Ситуація третя: два об'єкти починають рухатись одночасно в одному напрямку.

Умовний поділ задач на рух: рух назустріч, рух в одному напрямку, рух в протилежних напрямках, рух і течія, рух по колу.

Рух назустріч один одному
В даному випадку час до зустрічі двох об'єктів обчислюємо за формулою

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2},$$

де початкова відстань між двома об'єктами S, швидкості об'єктів v_1 та v_2 . В даному випадку сума швидкостей $v_1 + v_2$ називається *швидкістю зближення.*

Задача 1. Два автомобілі виїхали назустріч один одному. Початкова відстань між ними була 660 км. Один автомобіль їхав зі швидкістю 100 км/год, а інший зі швидкістю 120 км/год. Через який час вони зустрінуться?

Розв'язання

1) 100+120 = 220(км/год)- швидкість зближення автомобілів .

2) 660:220 = 3(год) - час до зустрічі автомобілів.

Відповідь: через 3 години.

Рух в одному напрямку
В даному випадку час до зустрічі двох об'єктів обчислюємо за формулою

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2},$$

де початкова відстань між двома об’єктами S, швидкості об’єктів v_1 та v_2. В даному випадку сума швидкостей $v_1 + v_2$ називається *швидкістю зближення.*

Рух в протилежних напрямках

Задача 2. Із однієї точки одночасно в протилежних напрямках вибігли два тигри. Швидкість одного тигра 48 км / год., а другого – 54 км / год. Яка відстань буде між тиграми через 2 години?

ПЕРШИЙ СПОСІБ РОЗВ’ЯЗАННЯ:

1) 48 * 2 = 96 (км) – пробіжить один тигр за 2 год.

2) 54 * 2 = 108 (км) – пробіжить другий тигр за 2 год.

3) 96 + 108 = 204 (км) – буде між тиграми через 2 год.

Відповідь: 204 км.

ДРУГИЙ СПОСІБ РОЗВ’ЯЗАННЯ:

1) 48 + 54 =102 (км /год.) – швидкість віддалення тигрів.

2) 102 * 2 =204 (км) – відстань між тиграми через 2 години.

Відповідь: 204 км.

Рух і течія

Розглянемо тепер, як розв’язуються задачі на рух по річці. У цих задачах є своя особливість: потрібно розрізняти швидкість руху за течією та швидкість руху проти течії.

Нехай, наприклад, власна швидкість човна (тобто його швидкість у стоячій воді) дорівнює 15 км/год, а швидкість течії річки дорівнює 2 км/год. Тоді швидкість, з якою човен пливе за течією, складається з його власної швидкості та швидкості течії: 15 + 2 = 17 (км/год). А швидкість, з якою човен пливе проти течії, отримуємо відніманням швидкості течії від власної швидкості човна: 15 – 2 = 13 (км/год).

Задача 3. Моторний човен та яхта, знаходячись на озері на відстані 30 км один від одного, рухаються назустріч один одному і зустрічаються через одну годину. Якби моторний човен знаходився на відстані 20 км від яхти і доганяв її, то на це знадобилось би 3 год. 20 хв. Знайти швидкості моторного човна та яхти.

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість човна, y км/год – швидкість яхти. Тоді швидкість зближення човна і яхти при русі назустріч дорівнює $x + y$, а час до зустрічі $\frac{30}{x+y}$, що за умовою складає 1 год. Якби човен доганяв яхту, то швидкість зближення була б $x - y$. А час до зустрічі $\frac{20}{x-y}$ або $\frac{10}{3}$ год.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{30}{x+y} = 1, \\ \dfrac{20}{x-y} = \dfrac{10}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$$

Відповідь: швидкість човна 18 км/год, швидкість яхти 12 км/год.

Задача 4. Швидкість катера в стоячій воді становить 14 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Визнач:

1) швидкість катера за течією річки;

2) швидкість катера проти течії річки;

3) шлях, який проходить катер за 2 год за течією річки;

4) шлях, який проходить катер за 3 год проти течії річки.

Розв'язання. Швидкість катера становить 14км/год – за умовою задачі, тоді його швидкість за течією: 14 + 2 = 16 (км/год), а його швидкість проти течії становить: 14 – 2 = 12 (км/год). Звідси можна знайти шлях, який катер проходить за 2 год за течією річки: 16 * 2 = 32 (км), а шлях, який катер проходить за 3 год проти течії річки: 12 * 3 = 36 (км).
Відповідь: 1) 16; 2) 12; 3) 32; 4) 36.

Рух по колу

Якщо в умові задачі дано рух по колу, то шляхом вважають довжину кола, по якому рухаються об'єкти: $S = 2\pi r$, де r – радіус кола.

Якщо об'єкти рухаються назустріч, то час до першої зустрічі $t = \frac{2\pi r}{v_1 + v_2}$, враховуючи, що $S_2 + S_1 = 2\pi r$ Через такий же час об'єкти зустрінуться наступний раз, тобто t – це час між двома послідовними зустрічами.

Якщо тіла рухаються в одному напрямку і другий об'єкт має швидкість більшу ніж перший, то зустріч буде відбуватись тоді, коли шлях другого об'єкта перевищуватиме шлях першого на довжину кола, тобто

$S_2 - S_1 = 2\pi r$, тоді час між двома послідовними зустрічами $t = \frac{2\pi r}{v_1 - v_2}$.

Задача 5. По колу радіусом 2 м рівномірно і в одному напрямку рухаються дві точки. Одна з них робить повний оберт на 3,14с швидше ніж друга. Час між двома послідовними зустрічами точок дорівнює 6,28с. Знайти швидкості руху точок.

Розв'язання: Точки рухаються по колу довжина якого дорівнює 2π r, де r - радіус кола. За умовою r = 2 , тому довжина кола дорівнює 4π . Нехай x м/с – швидкість першої точки, тоді час, за який точка пройде один оберт дорівнює $\frac{4\pi}{x}c$. Аналогічно, y- м/с – швидкість другої точки (причому $x > y$), за $\frac{4\pi}{y}c$ вона робить один оберт. За першою умовою задачі маємо рівняння

$$\frac{4\pi}{y} - \frac{4\pi}{x} = 3{,}14.$$

Друга умова означає, що за 6,28с перша точка пройде по колу шлях на 4π більший, ніж друга точка. Це дає друге рівняння

$6{,}28x - 6{,}28y = 4\pi$.

Приймаємо $\pi = 3{,}14$ і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{4}{y} - \frac{4}{x} = 1, \\ x - y = 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \frac{4(x-y)}{xy} = 1, \\ x - y = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x * y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Враховуючи, що $x > y$, знаходимо $x = 4$, $y = 2$.

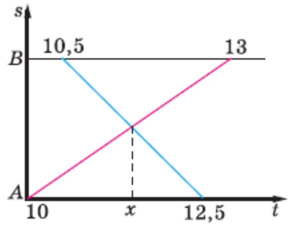
Відповідь: швидкість руху першої точки - 4 м/с, другої - 2 м/с.

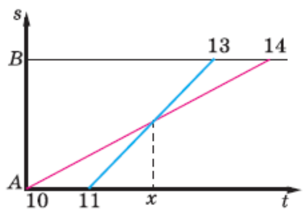
Графічне розв'язування задач на рух

Для розв'язування деяких задач на рух можна створювати графічні моделі, за якими задачі можна розв'язувати усно, дивлячись на них [Бевз].

Задача 6. О 10 год з міста *A* до міста *B* виїхав мотоцикліст, а через 30 хв йому назустріч з *B* виїхав автомобіль. О котрій годині вони зустрілись, якщо автомобіль до *A* приїхав о 12 год 30 хв, а мотоцикліст до *B* — о 13 год (малюнок ліворуч)?

Задача 7. О 10 год з міста *A* до міста *B* виїхав мотоцикліст, об 11 год так само з *A* до *B* — автомобіль. О котрій годині автомобіль наздогнав мотоцикліста, якщо він приїхав до *B* о 13 год, а мотоцикліст — о 14 год (малюнок праворуч)?





Задачі для самостійного опрацювання

ЗАДАЧА 1. За 2 години автобус проїхав 120 км, проїжджаючи щогодини однакову кількість кілометрів. Скільки кілометрів автобус проїжджав за 1 годину?

Відповідь: 60 км.

ЗАДАЧА 2. З двох станцій одночасно назустріч один одному вийшли два потяги і зустрілись через 8 годин. Визначте відстань між станціями, якщо швидкість одного потяга становила 55км/год, а другого – 78 км/год.

Відповідь: 1064 км – відстань між станціями.

ЗАДАЧА 3. Відстань від А до В дорівнює 120 км. Відстань від А до В автомобіль проїхав зі швидкістю 40 км/год, а від В до А – зі швидкістю 60 км/год. Яка середня швидкість його руху?

Відповідь: середня швидкість автомобіля 48 км/год.

ЗАДАЧА 4. Із міста виїхав велосипедист зі швидкістю 25 км/год, а через 1,4 години за ним виїхав автомобіль зі швидкістю 53 км/год. Через який час після виїзду велосипедиста його дожене автомобіль?

Відповідь: автомобіль дожене велосипедиста через 2 год 39 хв після виїзду того з міста.

ЗАДАЧА 5. Катер, власна швидкість якого 18 км/год, плив 2 год за течією річки і 3 год проти течії. Яку відстань за цей час подолав катер, якщо швидкість течії річки 2 км/год?

Відповідь: 88 км.

ЗАДАЧА 6. Власна швидкість теплохода 22 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Скільки часу витрачає теплохід на шлях між двома пристанями, відстань між якими 120 км, якщо він буде пливти: 1) за течією; 2) проти течії?

Відповідь: 1) 5 год; 2) 6 год.

ЗАДАЧА 7. Човен, власна швидкість якого 21 км/год, проплив річкою шлях від пункту А до пункту В і повернувся назад. Скільки часу витратив човен, якщо відстань між пунктами А і В становить 72 км, а швидкість течії – 3 км/год?

Відповідь: 7 год.

ЗАДАЧА 8. Дві черепахи одночасно почали рухатись у протилежних напрямах зі швидкостями 6 дм/хв і 4 дм/хв. Яка буде відстань між черепахами через 35 хв?

Відповідь: 350 дм.

2. Задачі «на відсотки»

Відсоток (або процент) — це одна сота частина від числа (величини). Часто у завданнях буває зручно перевиражати дані нам у відсотках величини у частках. Наприклад, 1 % числа становить 0,01 (1/100) частину числа; 50 % становить 0,5 (1/2, половину) частини; 20% від певної величини – це 20/100 або 2/10 або 0,2 від тієї ж величини. 100 % становить 1 (цілу) частину, тобто дане число.

Також важливо розуміти, наприклад, якщо деяку величину зменшили на 23%, то це означає, що від неї залишилося 77% або 0,77 від початкової величини. Якщо величину збільшили, скажімо на 42%, це означає, що в результаті вона склала 142% або 1,42 від початкового значення.

Існує *три види основних задач на відсотки*:

а) знаходження відсотка від цілого (числа): p відсотків від числа *а дорівнює* $a \cdot 0{,}01p$;
б) знаходження цілого за даним числом його відсотків: число, p відсотків якого дорівнюють b, дорівнює $b : (0{,}01p)$;
в) відсоткове відношення: відсоткове відношення a і b дорівнює (a : b) · 100 %.

При розв'язуванні основних видів задач на відсотки застосовують три способи:

а) зведення до одиниці;
б) зведення до відповідних задач на дроби ;
в) застосування пропорцій.

Знаходження відсотка від цілого

Приклад 1. Знайти 21% від 150.

Розв'язання.

Спосіб 1. (150 / 100) * 21 = 1,5 * 21 = 31,5.

Спосіб 2. 150 * 0,21 = 150 * $\frac{21}{100} = \frac{3*21}{2}$=31,5.

Спосіб 3. 150 складає 100%,

x складає 21%.

$$x = \frac{150 * 21}{100} = 31{,}5.$$

Знаходження цілого за даним числом його відсотків

Приклад 2. Знайти число, якщо 17% його становлять 68.

Розв'язання.

Спосіб 1. (68 / 17) * 100 = 400.

Спосіб 2. 68 / 0,17 = 68 / $\frac{17}{100}$ = $\frac{68*100}{17}$ = 400.

Спосіб 3. 68 складає 17%,

x складає 100%.

$$x = \frac{68 * 100}{17} = 400.$$

Відсоткове відношення

Приклад 3. Скільки відсотків складає число 18 від 144?

Розв'язання.

Спосіб 1. 18 / $\frac{144}{100}$ = $\frac{18 * 100}{144}$ = $\frac{1*100}{8}$ = $\frac{25}{2} = 12,5\%$.

Спосіб 2. $\frac{18}{144} * 100\% = \frac{1}{8}$ * 100% = 12,5%.

Спосіб 3. 18 складає x%,

144 складає 100%.

$$x = \frac{18 * 100}{144} = 12{,}5\%.$$

Приклад 4. Початкова вартість книги становила 136 грн. Унаслідок уцінення вартість цієї книги було зменшено на 60%.

1. Обчисліть вартість книги після уцінення (у грн).

2. Скільки відсотків становить початкова вартість книги від її вартості після уцінення?

Розв'язання.

1) Вартість книги після уцінення становить 40% від початкової вартості, тому 136 :100· 40 =1,36· 40 = 54,4 - вартість книги після уцінення.

2) Вартість книги після уцінення 54,4 грн. становить 100%, а початкова вартість книги 136 грн. становить x %. Складаємо пропорцію

54,4 складає 100%

136 складає x %.

$$x = \frac{136 * 100}{54,4} = 250\%.$$

Відповідь: 1) 54,4; 2) 250.

Приклад 5. Задано числовий вираз $\dfrac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}} + \ 3\,\frac{3}{5}$.

1) Обчисліть значення даного виразу.

2) Знайдіть число, якщо 25% його складає значення даного виразу.

Розв'язання.

1) $\dfrac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{4}} + \ 3\,\frac{3}{5} = \ \dfrac{3 + \frac{13}{12}}{3 - \frac{1}{12}} + \ 3\,\frac{3}{5} = \ \dfrac{\frac{49}{12}}{\frac{35}{12}} + \ \frac{18}{5} = \ \frac{7}{5} + \ \frac{18}{5} = 5$

2) 5: 25·100 = 20

Відповідь: 1) 5; 2) 20.

Приклад 6. Відомо, що 3 кг огірків і 2 кг помідорів коштували 17 грн. Після того, як огірки подешевшали на 20%, а помідори подорожчали на 10%, за 2 кг огірків і 3 кг помідорів заплатили 18 грн. Знайдіть початкову вартість 1 кг огірків і 1 кг помідорів.

Розв'язання. Нехай x – початкова ціна 1 кг огірків, а y – початкова ціна 1 кг помідорів. Відомо, що за 3 кг огірків та 2 кг помідорів заплатили 17 грн. Маємо перше рівняння: $3x + 2y = 17$. За умовою задачі огірки подешевшали на 20%, а помідори подорожчали на 10%. Звідси маємо, що $\frac{80x}{100}$ грн $-$ ціна за 1 кг огірків після зміни в ціні та $\frac{110y}{100}$ грн $-$ ціна за 1 кг помідорів після зміни в ціні. Також відомо, що за 2 кг огірків та 3 кг помідорів заплатили 18 грн після всіх цих змін. Маємо друге рівняння: $\frac{160x}{100} + \frac{330y}{100} = 18$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17, \\ \dfrac{160x}{100} + \dfrac{330y}{100} = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17, \\ 1{,}6x + \ 3{,}3y \ = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17, \\ 1{,}6x + \ 3{,}3y \ = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{17 - 2y}{3}, \\ 1{,}6x + \ 3{,}3y \ = 18; \end{cases}$$

$$1{,}6(\tfrac{17-2y}{3}) + 3{,}3y = 18;$$

$$y = 4;$$

Знаходимо x:

$$x = \frac{17 - (2 * 4)}{3};$$

$$x = 3.$$

Відповідь: 3 грн – початкова ціна 1 кг огірків, а 4 грн – початкова ціна 1 кг помідорів.

Простий відсоток

Найчастіше доводиться розв'язувати задачі на відсотки бухгалтерам і працівникам банків. Розглянемо приклади, пов'язані з нарахуванням інвесторам (вкладникам) відсоткових грошей.

Говорять про прості відсотки, якщо нараховують відсотки лише на початково інвестовану суму.

Коли деяка величина збільшується на постійну кількість відсотків за кожний фіксований період часу, то будемо користуватись формулою виду

$$An = A_0(\ 1 + 0{,}01pn),$$

де An - деяка величина, яку одержимо після періоду часу n , $p\%$ - певні відсотки величини A_0 . Ця формула описує багато конкретних ситуацій і називається формулою простого відсоткового зростання. Існує також формула простого відсоткового спадання

$$An = A_0(\ 1 - 0{,}01pn)$$

Наприклад, на початку року вкладник розміщує на рахунку в банку суму P під відсоток r річних. За рік він одержить суму P_1, яка дорівнює початковому вкладу P плюс нараховані відсотки Pr /100 або $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} + \frac{\mathrm{Pr}}{100} = \mathrm{P}(\ 1 + 0{,}01r)$. Через два і три роки сума на рахунку становитиме:

P_2= P+Pr/100+ Pr/100=P(1+2*0,01r) і $\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}(\ 1 + 3 * 0{,}01r)$

Аналогічно можна представити суму P_n, яку вкладник одержить через n років: $P_n = P\left(1 + \frac{r}{100}n\right)$, де P — сума початкового вкладу; P_n — сума вкладу через n років.

Нарахування за схемою простих відсотків застосовується, як правило, у короткострокових фінансових операціях, коли після кожного інтервалу нарахування вкладнику виплачуються відсотки.

Приклад 7. Банк виплачує вкладникам кожного місяця 2% від суми внесеної вкладником (відсотки нараховуються на картку). Клієнт зробив вклад у розмірі 5000 грн. Яку кількість грошей матиме клієнт через півроку?

Розв'язання.

$A_6 = 5000 * (1 + 0{,}02 * 6) = 5000 * 1{,}12 = 5600$ (грн).

Відповідь: 5600 грн.

Складний відсоток

У довгострокових фінансово-кредитних угодах частіше використовують *складні відсотки*. Їх нараховують не тільки на основну суму, а й на нараховані раніше відсотки. У цьому випадку кажуть, що відбувається капіталізація відсотків.

Припустимо, що вкладник поклав до банку під 9 % річних 1000 грн. Це початковий капітал. Через рік банк нарахує вкладнику за це 90 грн відсоткових грошей (9 % від 1000 грн.). Після цього на рахунку вкладника стане 1090 грн, бо 1000(1 + 0,09) = 1090. За другий рік відсоткових грошей йому нарахують уже 9 % від 1090 грн; нарощений капітал вкладника після двох років дорівнюватиме $1000(1 + 0{,}09)^2$ грн. Зрозуміло, що через n років цей капітал становитиме $1000(1 + 0{,}09)^n$ грн. [Бевз]

Отже, вкладений в банк початковий капітал P під r % річних через n років перетвориться в нарощений капітал: $\mathrm{P_n} = \mathrm{P}(1 + r * 0{,}01)^n$.

Це формула складних відсотків. Вона є однією з базових у фінансових розрахунках.

Отже, ми маємо справу зі «складними відсотками», якщо деяка величина підлягає поетапній зміні. При цьому кожний раз її зміна складає визначене число відсотків від значення, яке ця величина мала на попередньому етапі. Розглянемо спочатку випадок, коли у кінці кожного етапу величина змінюється на одну і ту ж постійну кількість відсотків – $p\%$.

Деяка величина A, початкове значення якої дорівнює A_0 , у кінці першого етапу буде рівна

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100}A_0 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

У кінці другого етапу її значення стане рівним

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100} A_1 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

У даному випадку множник $1 + \frac{p}{100}$ показує, у скільки разів величина А збільшилась за один етап. Неважко помітити, що степінь множника $1 + \frac{p}{100}$ співпадає з номером етапу, тобто

$$A_3 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3, \text{ і так далі.}$$

У кінці n-го етапу

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Ця формула показує, що величина А зростає (або зменшується при $p < 0$) як геометрична прогресія, перший член якої дорівнює A_0 , а знаменник дорівнює $1 + \frac{p}{100}$.

Дещо складнішими є задачі, коли приріст величини А на кожному етапі змінюється. Нехай величина А в кінці першого етапу змінюється на $p_1\%$, в кінці другого етапу – на $p_2\%$, в кінці третього – на $p_3\%$ і т. д. Якщо $p_k > 0$, то величина А на цьому етапі зростає, якщо ж $p_k < 0$, то величина А на цьому етапі зменшується. Зміна величини А на $p\,\%$, рівносильна множенню цієї величини на множник $1 + \frac{p}{100}$. Тому кінцевий вид шуканої формули такий:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \ldots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right)$$

Приклад 8. Банк приймає кошти на депозитний рахунок під 320% річних, але відсотки нараховуються щомісячно. Із нарахованої суми береться податок у розмірі 25%. Сума, що залишилась після цього додається до початкової суми на депозитному рахунку і все повторюється. У скільки разів збільшиться початкова сума через півроку? (Відповідь округліть до цілих).

Розв'язання.

Так, як річна ставка на депозитному рахунку складає 320%, то щомісячна складає $\frac{320}{12} = \frac{80}{3}\%$. Нехай сума початкового рахунку A_0 , тоді в кінці першого місяця

$$A_1 = A_0 + \left(A_0 * \frac{80}{3 * 100}\right) * \frac{75}{100}.$$

(дана формула включає податкові відрахування по рахунку у розмірі 25% - множник $\frac{75}{100}$). Отже,

$$A_1 = A_0 \left(1 + \frac{1}{5}\right), A_1 = \frac{6}{5} A_0.$$

Застосуємо формулу, що показана вище: після k-го місяця сума становить

$$A_1 = A_0 \left(\frac{6}{5}\right)^k$$

У нашому випадку, за шість місяців початкова сума на рахунку збільшиться у

$$A_6 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 \approx 2{,}9 \text{ рази.}$$

Відповідь: у 3 рази.

Приклад 9. Нехай вкладник поклав у банк 100 000 грн під 10 % річних. Яка сума буде на його рахунку через 7 років за умови, що вкладник протягом цього строку не знімає гроші з рахунку?

Розв'язання. Нехай a_0 — початковий капітал вкладника, тобто a_0 = 100 000 грн.

Позначимо через a_1, a_2, ..., a_7 кількість грошей на рахунку відповідно в кінці першого, другого, ..., сьомого років. Очевидно, що послідовність a_0, a_1, a_2, ..., a_7 є геометричною прогресією, знаменник

якої дорівнює 110 %, тобто 1,1.

Тоді $a_7 = a_0 * 1{,}1^7 = 100\,000 * 1{,}1^7 = 194\,871{,}71$ (грн).

Відповідь: 194 871,71 грн.

Аналогічно розв'язують цю задачу в загальному вигляді, коли початковий капітал, який дорівнює a_0, поклали в банк під p % річних. Тоді в кінці n-го року матимемо:

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Отриману формулу називають **формулою складних відсотків.**

У складніших прикладних задачах на відсотки часто йдеться про збільшення або зменшення величини на кілька відсотків. У таких випадках треба добре розуміти, від чого беруться відсотки. Наприклад, коли говорять, що заробітна плата підвищилась на 10 %, то розуміють, що вона збільшилась на 10 % від попередньої заробітної плати. При цьому, якщо значення x більше від y на p %, то значення y менше від x не на p %. Збільшенню в 2 рази відповідає збільшення на 100 %, а зменшенню в 2 рази — зменшення на 50 %. Ціна товару теоретично може збільшуватись на будь-яке число відсотків, а зменшитись, наприклад, на 120 % не може.

Задачі для самостійного опрацювання

Приклад 1. Знайти 15% від 400 . (трьома способами)

Відповідь: 60.

Приклад 2. Знайти число, якщо 25% його становлять 50. (трьома способами)

Відповідь: 200.

Приклад 3. Скільки відсотків складає число 45 від 600? (трьома способами)

Відповідь: 7,5%.

Приклад 4. Початкова вартість книги становила 150 грн. Унаслідок уцінення вартість цієї книги було зменшено на 45%.

1) Обчисліть вартість товару після уцінення (у грн).

2) Скільки відсотків становить початкова вартість товару від його вартості після уцінення? (запишіть приблизну відповідь)

Відповідь: 1) 82,5 грн; 2) 181,8%.

Приклад 5. Банк виплачує вкладникам кожного місяця 4% від суми внесеної вкладником (відсотки нараховуються на картку). Клієнт зробив вклад у розмірі 3000 грн. Яку кількість грошей матиме клієнт через 8 місяців?

Відповідь: 3960 грн.

Приклад 6. У кошику знаходяться кульки трьох кольорів: 60 – червоних; 40 – зелених; 100 – синіх. Скільки відсотків від загальної кількості кульок становлять кульки червоного, зеленого та синього кольорів?

Відповідь: 50% кульок синього кольору; 20% кульок зеленого кольору; 30% кульок червоного кольору .

Приклад 7. Ціна за підручник становила 55 грн, а через день знизилася до 40 грн за кг. На скільки відсотків знизилася ціна за підручник порівняно з попередньою? (запишіть приблизну відповідь)

Відповідь: 27,2%.

Приклад 8. Задано числовий вираз $\frac{1^5+2^4+3^3+4^2+5^1}{5}$**.**

1) Обчисліть значення даного виразу.
2) Знайдіть число, якщо 40% його складає значення даного виразу.

Відповідь: 1) 13; 2) 32,5.

3. Задачі «на сумісну роботу».

Дуже близьку математичну модель до задач «на рух» мають задачі, в яких хто-небудь виконує яку-небудь роботу, або задачі, які пов'язані з наповненням резервуарів (басейну). У задачах такого типу вся робота або повний об'єм резервуару відіграє роль відстані (шляху), а продуктивність праці об'єктів, які виконують роботу, аналогічні швидкості руху.

Будемо користуватись такими позначеннями: робота (обсяг або об'єм роботи) – A; продуктивність праці – V (кількість роботи, яку виконали за одиницю часу). Робота, виконана за час t, в цьому випадку обчислюється за формулою :

$$A = V * t.$$

При використанні цієї формули не забувайте зводити всі величини до однотипних одиниць виміру. Наприклад, якщо продуктивність верстата в задачі вимірюється в деталях на годину, роботу слід вимірювати в деталях, а час - в годинах. Якщо продуктивність вимірюється в кілограмах на день, роботу треба переводити в кілограми, а час – у дні.

У завданнях на *спільну роботу* слід враховувати такі зауваження:

- По-перше, якщо працівники виконують роботу одночасно, їх продуктивності підсумовуються, а виконані роботи дають у сумі загальну роботу. Тобто продуктивність сумісної роботи дорівнює сумі продуктивностей
- По-друге, якщо працівники почали працювати одночасно, то часи їхньої роботи однакові. А якщо один із працівників почав працювати на, скажімо, 1 годину пізніше за другого, то час роботи другого працівника дорівнює t , а час роботи першого працівника дорівнює (t –1), тому що він став працювати пізніше, отже, працює протягом меншого часу .
- Часто, якщо обсяг роботи явно не вказано, можна сприймати її за умовну одиницю.

Деяку абстрактну роботу, обсяг якої не вказується (яка не вимірюється в штуках, кількості виробів) і не є шуканим (наприклад, друкування тексту, заповнення резервуару, риття котловану тощо), виконує кілька осіб або механізмів, що працюють рівномірно (тобто, зі сталою для кожного з них продуктивністю). Тоді обсяг такої роботи зазвичай приймається за одиницю.

Час t, що потрібний для виконання роботи, і V - продуктивність праці, тобто величина роботи , що виконується за одиницю часу, будуть у співвідношенні

$$V = \frac{1}{t}.$$

.**Задача 1**. Марія набрала на комп'ютері 9 сторінок за 3 год, а Тетяна – 8 сторінок за 2 год. Хто з дівчаток працював швидше?

Розв'язання. Марія набрала більше сторінок, ніж Тетяна, але вона й працювала більше часу. Для того щоб відповісти на питання задачі, треба знайти, скільки сторінок набрала кожна дівчинка за 1 год. Марія набирала по 9 : 3 = 3 сторінки за годину, а Тетяна – по 8 : 2 = 4 сторінки за годину.

Відповідь: Тетяна працювала швидше, тому що за годину вона набрала більше сторінок.

Задача 2 . Двоє робітників, працюючи разом, виконали деяку роботу за 6 год. Перший з них, працюючи окремо, може виконати всю роботу на 5 год швидше, ніж другий робітник, якщо останній буде працювати окремо. За скільки годин кожний з них, працюючи окремо, зможе виконати всю роботу?

Розв'язання.

Приймемо всю роботу за одиницю. Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x год, працюючи окремо, тоді другому робітнику знадобиться $(x + 5)$ год. Продуктивність праці першого робітника $\frac{1}{x}$, другого $\frac{1}{x+5}$. Тоді за 6 год сумісної роботи з продуктивністю, що дорівнює сумі двох продуктивностей, робітники виконали всю роботу. Маємо рівняння

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5}\right) * 6 = 1;$$

$$\frac{x+5+x}{x*(x+5)} = \frac{1}{6};$$

$$\begin{cases} 6 * (2x + 5) = x^2 + 5x, \\ x \neq 0, \quad x \neq -5; \end{cases}$$

$$x^2 + 5x - 12x - 30 = 0;$$

$$x^2 - 7x - 30 = 0;$$

$$x = 10 \text{ або } x = -3.$$

Корінь $x = -3$ не підходить за змістом задачі, тому $x = 10$, $x + 5 = 15$.

Відповідь: 10 год, 15 год.

Задача 3. Одна труба наповнює басейн на 2 години, а друга на 4,5 години довше, ніж наповнять цей басейн обидві труби, відкриті одночасно. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо?

Розв’язання: Нехай V - об’єм басейну, t - час, за який наповнять басейн дві труби, що працюють разом. Тоді продуктивність першої труби $\frac{V}{t+2}$, другої $\frac{V}{t+4,5}$, сумісна продуктивність $\frac{V}{t}$.

$$\frac{V}{t+2}+\frac{V}{t+4,5}=\frac{V}{t};$$

$$\frac{t+4,5+t+2}{(t+2)*(t+4,5)}=\frac{1}{t};$$

$$\begin{cases} t*(2t+6,5)= t^2+6,5t+9, \\ t \neq 0, \ \ t\neq -2, \ \ t\neq -4,5; \end{cases}$$

$$t^2-9=0;$$

$$t=\pm 3.$$

Корінь $t=-3$ не підходить за змістом задачі, тому $t=3$, $t_1=t+2=5$, $t_2=t+4,5=7,5$.

Відповідь: перша труба наповнить басейн за 5 год, друга – за 7,5 год.

Задача 4. Майстер виготовляє 60 деталей за 4 год, а кожен з двох його здобувачів освіти – по 18 деталей за 2 год. За скільки годин вони утрьох виготовлять 99 деталей?

Розв'язання. За умовою задачі майстер виготовляє 60 деталей за 4 год. Можемо знайти скільки деталей він виготовляє за годину: 60 / 4 = 15 (деталей). Аналогічно знайдемо скільки деталей виготовляє кожен з здобувачів освіти за годину:
18 / 2 = 9 (деталей). Тепер знайдемо скільки деталей вони виготовляють разом за годину, просумувавши виготовлені ними деталі за годину. Отримуємо:
15 + 9 + 9 = 33 (деталі). Звідси тепер знаходимо за скільки часу вони утрьох виготовлять 99 деталей: 99 / 33 = 3(год).

Відповідь: 3 год.

Задача 5. Два робітника можуть разом виконати $\frac{2}{3}$ завдання за 4 дні. За скільки днів це завдання може виконати кожний робітник, якщо перший з них може зробити це на 5 днів швидше, ніж другий?

Розв'язання: Приймемо об'єм всього завдання за одиницю. Нехай перший робітник може виконати все завдання за x днів (тобто його продуктивність $\frac{1}{x}$), тоді другий може це зробити за $x+5$ днів (тобто його продуктивність $\frac{1}{x+5}$). За 4 дні перший виконує $\frac{4}{x}$ завдання, а другий $\frac{4}{x+5}$ завдання. За умовою це становить виконати $\frac{2}{3}$ завдання, тобто рівняння має вигляд:

$$\frac{4}{x}+\frac{4}{x+5}=\frac{2}{3}; \text{(ОДЗ: } x \neq 0, x \neq -5)$$

$$12(x+5)+12x=2x(x+5);$$

$$6(x+5)+6x=x(x+5);$$

$$x^2-7x-30=0;$$

$$x_1=10;$$

$x_2=-3$ – не підходить за умовою задачі.

$$x+5=10+5=15.$$

Відповідь : 10 днів, 15 днів.

Задача 6. Водойма може бути спорожнена через три труби. При спільній роботі першої та другої труб водойма спорожніє за 2 години. При спільній роботі першої та третьої труб водойма спорожніє за 1 годину 12 хвилин. При спільній роботі другої та третьої труб водойма спорожніє за 1 годину 30 хвилин. За який час може осушити водойму кожна з труб окремо?

Розв'язання: Об'єм водойми приймемо за одиницю. Нехай продуктивність першої труби становить x, другої – y , третьої – z. Тоді за умовою:

$$\begin{cases} 2(x+y)=1, \\ 1{,}2(x+z)=1, \\ 1{,}5(y+z)=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{2}, \\ x+z=\frac{5}{6}, \\ y+z=\frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}-x, \\ z=\frac{5}{6}-x, \\ y+z=\frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} - x + \frac{5}{6} - x = \frac{2}{3};$$

$$x = \frac{1}{3};$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$z = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

$t = \frac{A}{S}$, де А – вся робота, а S – продуктивність.

Маємо: $t_1 = \frac{1}{\frac{1}{3}}, t_2 = \frac{1}{\frac{1}{6}}, t_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$. Звідси: $t_1 = 3, t_2 = 6, t_3 = 2$.

Відповідь : 3 години, 6 годин, 2 години.

Задачі для самостійного опрацювання

ЗАДАЧА 1. Кішка з кошеням з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували одну, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошеняті?

Відповідь: 29 днів.

ЗАДАЧА 2 . Двоє робітників, працюючи разом, виконали деяку роботу за 4 год. Перший з них, працюючи окремо, може виконати всю роботу на 2 год швидше, ніж другий робітник, якщо останній буде працювати окремо. За скільки годин кожний з них, працюючи окремо, зможе виконати всю роботу?

Відповідь: 8 год; 10 год.

ЗАДАЧА 3. Одна труба наповнює басейн на 4 години, а друга на 9 годин довше, ніж наповнять цей басейн обидві труби відкриті одночасно. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо?

Відповідь: перша труба наповнить басейн за 10 годин, а друга за 15 год.

ЗАДАЧА 4. Майстер виготовляє 80 деталей за 4 год, а кожен з двох його здобувачів освіти – по 36 деталей за 3 год. За скільки годин вони утрьох виготовлять 264 деталі?

Відповідь: 6 год.

4. Задачі «на концентрацію, сплави, суміші, розчини»

Розв'язування таких задач пов'язане з поняттями «концентрація», «процентний вміст», «проба», «вологість» тощо і базується на наступних припущеннях.

Основні припущення в задачах такого виду:

а) всі одержані суміші, розчини чи сплави однорідні;

б) при змішуванні двох розчинів, що мають об'єми v_1 та v_2 , одержуємо суміш, об'єм якої дорівнює $v_1 + v_2$;

в) при переробці двох сплавів, що мають маси m_1 та m_2 , одержимо сплав масою $m_1 + m_2$;

г) нема різниці між літром як одиницею ємності і літром як одиницею маси ;

д) якщо суміш (розчин, сплав) маси m складається з речовин А, В, С, які мають маси відповідно m_1, m_2, m_3 , то величина $\frac{m_1}{m}$ (відповідно $\frac{m_2}{m}$; $\frac{m_3}{m}$) називається *концентрацією* речовини А (відповідно В, С) в суміші. Величина $\frac{m_1}{m} \cdot 100\%$ (відповідно $\frac{m_2}{m} \cdot 100\%$; $\frac{m_3}{m} \cdot 100\%$) називається *процентним вмістом* речовини А (відповідно В, С) в суміші. Зрозуміло, що $\frac{m_1}{m} + \frac{m_2}{m} + \frac{m_3}{m}$=1, тобто концентрація двох речовин залежить від третьої.

Відзначимо, що такі припущення не завжди виконуються в дійсності.

При складанні рівняння зазвичай відслідковують вміст якоїсь однієї речовини з тих, які змішуються (сплавляються тощо) і маса якої не змінювалась при змішуванні (сплавлянні).

Задача 1 . Маємо шматок сплаву міді з оловом масою 12 кг, що містить 45% міді. Скільки чистого олова необхідно додати до цього шматка сплаву, щоб одержати новий сплав із вмістом міді 40%.

Розв'язання. Сплав складається з міді й олова. Прослідкуємо за вмістом одного з них, наприклад, олова, у початковому сплаві і в отриманому. У 12 кг сплаву було 45% міді, тоді олова було 55%, тобто $12 * \frac{55}{100} = 12 * 0{,}55$ кг олова.

Нехай x кг олова необхідно додати до сплаву, який маємо, тоді вага сплаву, який одержимо, дорівнюватиме $(12 + x)$ кг, в якому міді стало 40%, тобто $\frac{40(12+x)}{100} = 0{,}4 * (12 + x)$ кг.

За умовою задачі можна скласти таблицю:

сплав	мідь	олово	маса
I	0,45 * 12	0,55 * 12	12 кг
II	-	x	x кг
новий	0,4 * (12 + x)	-	12 + x

За умовою задачі маса міді не змінювалась.

Маємо рівняння:

$$0,4 * (12 + x) = 0,45 * 12;$$

$$0,4x = 0,45 * 12 – 0,4 * 12 ;$$

$$0,4x = 5,4 – 4,8;$$

$$0,4x = 0,6;$$

$$x = 1,5.$$

За умовою задачі x>0, тому знайдене значення x задовольняє умову задачі.

Відповідь: 1,5 кг чистого олова треба додати до сплаву.

Зауваження. Запишемо розв'язання, якщо відслідковувати олово, і врахувати, що вміст міді у сплаві не змінився. Спочатку олова було $12 * \frac{55}{100}$ кг. Додали x кг олова (міді не додавали). Тоді вийшло $(12 + x)$ кг нового сплаву, в якому олова стало 60%, тобто $\frac{60(12+x)}{100}$ кг. Отримаємо рівняння

$12 * \frac{55}{100} = \frac{60(12+x)}{100}$ або $0,6 * (12 + x) = 0,55 * 12$, звідки $x = 1,5$.

Задача 2. Маємо сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%. Скільки сталі того і іншого сорту необхідно взяти, щоб після переплавки одержати 140 т сталі із вмістом нікелю 30%?

Розв'язання. Нехай вага першого сплаву – x кг, другого - y кг. За умовою задачі складаємо таблицю:

сплав	нікель	домішки	маса
I	$0,05\,x$	$0,95\,x$	x т
II	$0,4\,y$	$0,6\,y$	y т
новий	$0,3 * 140$	$0,7 * 140$	140 т

Складаємо систему рівнянь, використовуючи перший і третій стовпчики таблиці:

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 0,05\,x + 0,4\,y = 0,3 * 140; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 5\,x + 4\,y = 4200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 5y = -700, \\ 5\,x + 4\,y = 4200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ 35y = 3500; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 140, \\ y = 100; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40, \\ y = 100. \end{cases}$$

Відповідь: 40 т сталі із вмістом нікелю 5%, 100 т сталі із вмістом нікелю 40%.

Задача 3. Маємо два розчини кислоти різної концентрації. Об'єм одного розчину 4 л, другого - 6 л. Якщо їх злити разом, то отримається 35%-й розчин кислоти. Якщо ж злити рівні об'єми цих розчинів, то отримається 36%-й розчин кислоти. Скільки літрів кислоти знаходиться в кожному з висхідних розчинів?

Розв'язання. Нехай в першому розчині x л кислоти, а в другому - y л. Якщо їх злити разом, то $\frac{x+y}{4+6} * 100 = 35$. Візьмемо тепер ці ж розчини, але кожен в об'ємі 4 л. Тоді в першому розчині буде x л кислоти, а в другому - $\frac{2y}{3}$ л. Після з'єднання отримаємо, що $\frac{x+\frac{2y}{3}}{8} * 100 = 35$. Залишилось розв'язати дану систему з двох рівнянь методом підстановки. З першого рівняння $x + y = \frac{7}{2}$. Тоді 25 $\left(\frac{7}{2} - y\right) + \frac{50y}{3} = 72$, звідси y = 1,86 та x = 1,64.

Відповідь: 1,64 л в першому розчині та 1,86 л в другому.

Задача 4. Маємо два розчини солі у воді, перший 40%-й, другий - 60%-й. Їх з'єднали, додали 5 кг води та отримали 20%-й розчин. Якщо би замість 5 кг води добавили 5 кг 80%-ого розчину, то отримався би 70%-й розчин. Скільки було 40%-го та 60%-го розчинів?

Розв'язання. Нехай x кг - маса першого розчину, y кг - маса другого розчину. Тоді в першому розчині $\frac{x}{100} * 40$ кг солі, а в другому - $\frac{y}{100} * 60$ кг солі. Після їх з'єднання та додавання 5 кг води отримаємо, що,

$$\frac{\frac{2x}{5} + \frac{3y}{5}}{x + y + 5} * 100 = 20,$$

звідки $x = 5 - 2y$.

Після їх з'єднання та додавання 5 кг 80%-го розчину отримаємо, що

$$\frac{\frac{2x}{5}+\frac{3y}{5}+5*\frac{80}{100}}{x+y+5}*100=70,$$

звідки $3x+y=5$.

Залишилось розв'язати дану систему з двох рівнянь методом підстановки.

$$\begin{cases} x=5-2y, \\ 3x+y=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y, \\ 3(5-2y)+y=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y, \\ 15-6y+y=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y, \\ -5y=-10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5-2y, \\ y=2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Відповідь: 1 кг; 2 кг.

Задача 5. Сироп містить 18% цукру. Скільки кг води треба додати до 40 кг сиропу, щоб вміст цукру у новому розчині становив 15%?

Розв'язання. Відсотковий вміст цукру у початковому сиропі становить 18% від 40 кг – за умовою задачі , тобто 0,18 · 40 кг. Нехай до даного сиропу треба додати x кг води. Концентрація цукру в новому розчині становитиме 15% від (40 + x) кг, тобто 0,15 (40 + x) кг. Кількість цукру в сиропі не змінювалась. Отже, маємо рівняння:

$$\begin{cases} 0{,}15\,(40+x)=0{,}18\cdot 40, \\ x\neq -40; \end{cases}$$

$$6+0{,}15\,x=7{,}2;$$

$$0{,}15\,x=7{,}2-6;$$

$$0{,}15\,x=1{,}2$$

$$x=1{,}2:0{,}15$$

$$x=120:15$$

$$x=8.$$

Відповідь: треба додати 8 кг води.

Задачі для самостійного опрацювання

ЗАДАЧА 1. У двох сплавах мідь і цинк відносяться, 5:2 і 3:4 відповідно. На скільки кілограмів одного із сплаві треба взяти більше, щоб одержати 28 кг нового сплаву з рівним вмістом міді і цинку?

Відповідь: на 14 кг.

ЗАДАЧА 2. Маємо два водно-сольових розчини. Концентрація солі в першому розчині становить 0,25, а в другому – 0,4. На скільки більше треба взяти кілограмів одного розчину, ніж другого, щоб отримати розчин масою 50 кг, концентрація солі в якому – 0,34?

Відповідь: на 10 кг.

ЗАДАЧА 3. З'єднали 22 кг 15%-го розчину кислоти та 18 кг 25%-го розчину тієї ж кислоти. Визначити концентрацію нового розчину.

Відповідь: 19,5%.

ЗАДАЧА 4. Маємо два сплави, які складаються з цинку, міді та олова. Відомо, що перший сплав містить 40% олова, а другий - 26% міді. Відсоткове відношення цинку в першому та другому сплавах рівне. З'єднавши 150 кг першого сплаву и 250 кг другого, отримали новий сплав, в якому отрималося 30% цинку. Визначіть, скільки кілограмів олова міститься в отриманому новому сплаві.

Відповідь: 170 кг.

ЗАДАЧА 5. Один бак містить суміш кислоти з водою у відношенні 4 : 7, а другий — у відношенні 3 : 8. Скільки кілограмів суміші треба взяти з кожного бака, щоб отримати суміш у кількості 110 кг та щоб кислота та вода в ній були б у відношенні 71 : 149?

Відповідь: 60,5 кг та 49,5 кг.

ЗАДАЧА 6. Маємо два сплави міді з іншим металом, причому відносний вміст міді в одному з цих сплавів на 40% менше, ніж у другому. Після того як сплавили шматок першого сплаву, який містить 6 кг міді, з шматком другого сплаву, який містить 12 кг міді, отримали злиток, який містить 36% міді. Визначити вміст міді в першому сплаві.

Відповідь: 20%.

ЗАДАЧА 7. Маємо два злитки сплавів золота з сріблом. Відсотковий вміст золота в першому злитку в 2,5 рази більше, ніж у другому. Якщо сплавити обидва злитки разом, то отримаємо злиток, в якому міститься 40% золота. У скільки разів перший злиток важче другого, якщо відомо, що при сплаві рівних по масі частин першого та другого злитків отримується злиток, в якому міститься 35% золота?

Відповідь: в 2 рази.

ЗАДАЧА 8. З посудини, наповненої чистим гліцерином, вилили 1 л, а потім долили 1 л води. Після змішування вилили 1 л суміші та долили 1 л води. Нарешті, знову після змішування вилили 1 л суміші та долили 1 л води. В результаті цих операцій кількість води в посудині стала в 7 раз більше по об'єму, ніж гліцерину, який там залишився. Скільки літрів гліцерину та води залишилося в посудині після всіх операцій?

Відповідь: 0,25 л; 1,75 л.

ЗАДАЧА 9.З посудини місткістю 54л, наповненою кислотою, вилили декілька літрів та долили посудину водою, потім знову вилили стільки же літрів суміші. Суміш, яка залишилась в посудині, містить 24 л чистої кислоти. Скільки кислоти вилили в перший раз?

Відповідь: 18 л.

ЗАДАЧА 10. Відсоток вмісту (по масі) спирту в трьох розчинах утворюють геометричну прогресію. Якщо змішати перший, другий та третій розчини в новому відношені 2 : 3 : 4, то отримаємо розчин, який містить 32% спирта. Якщо ж змішати їх у відношенні 3 : 2 : 1, то отримаємо розчин, який містить 22% спирта. Скільки відсотків спирту містить кожен розчин?

Відповідь: 12%; 24%; 48%.

5. Задачі на числові залежності

При розв’язуванні задач на числові залежності (на знаходження числа) можуть бути корисними наступні відомості:

1. Якщо натуральне число А має n знаків, то $A = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, де $a_0,\ a_1, \dots, a_{n-1}$ відповідно кількість одиниць, десятків, сотень, … в числі А.
2. Якщо при діленні натурального числа A на натуральне число B у частці отримується q, а в остачі r ($r<B$), $A=B\,q + r$

Приклад 1. Знайти двоцифрове число, яке при діленні на добуток його цифр дає частку $\frac{8}{3}$, а різниця між ним та числом з переставленими цифрами дорівнює 18.

Розв'язання. Позначимо через x та y першу і другу цифри, тоді невідоме число матиме вигляд $10x + y$, а число з переставленими цифрами $10y + x$.

Запишемо систему рівнянь $\begin{cases} 10x + y = \frac{8}{3}xy, \\ 10x + y = 10y + x + 18, \end{cases}$

звідки знаходимо: $x = 6, \ \ y = 4.$ Отже, $10 \cdot 6 + 4 = 64$ – шукане число.

Відповідь: 64

Приклад 2. Знайти двоцифрове число, якщо відомо, що число одиниць у ньому на 2 більше, ніж десятків, і що добуток шуканого числа на суму його цифр дорівнює 144.

Розв'язання. Нехай у шуканому числі х одиниць. Тоді в ньому (х-2) десятків, і, отже, воно дорівнює (х-2)10+х=11х-20.

Сума його цифр рівна (х-2)+х=2х-2.
Отримуємо рівняння: (11х-20)(2х-2)=144. Його корені 4 і 13/11.

Оскільки х та х-2 – цифри числа, то х $\in N$ і $\begin{cases} 0 \le x \le 9, \\ 0 \le x - 2 \le 9. \end{cases}$

Зі знайдених розв'язків цим умовам задовольняє лише х=4. Тоді шуканим число буде число 24.

Відповідь: 24.

Приклад 3. Знайти два двоцифрових числа, про які відомо наступне: якщо до першого числа приписати справа друге число, а потім ще цифру 0, то отримається п'ятицифрове число, яке при діленні на квадрат другого числа дає в частці 39, а в остачі 575; якщо ж до першого числа приписати справа друге число і потім з утвореного таким чином числа відняти друге число, яке отримане приписуванням справа першого числа до другого, то різниця буде дорівнювати 1287.

Розв'язання. Нехай перше число x, а y – друге. Після приписування справа числа y до числа x отримаємо чотирицифрове число $(x*100+y)$, а після приписування до цього числа справа цифри 0 отримається $(x*100+y)*10$. Так як при діленні цього числа на число y^2 у частці вийде 39, а в остачі 575, то

$$(x*100+y)*10=y^2*39+575.$$

Отримали перше рівняння шуканої системи.

Після приписування справа двоцифрового числа x до двоцифрового числа y отримаємо чотирицифрове число $y*100+x$. таким чином отримаємо друге рівняння : $(x*100+y) - (y*100+x)=1287.$

Отже, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1000x + 10y = 39y^2 + 575, \\ \quad 99x - 99y = 1287. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: (48; 45) та (152/39; - 355/39).

За змістом задачі x та y – натуральні числа, причому $10 \le x \le 99$ та $10 \le y \le 99$. Тому розв'язком будуть числа 48 і 35.

Відповідь: 48; 35.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Із даних чотирьох чисел перші три відносяться між собою як 1/5 : 1/3 : 1/20, а четверте складає 15 % другого числа. Знайти ці числа, коли відомо, що друге число на 8 більше за суму решти чисел.

2. Сума цифр двозначного числа дорівнює 12. Якщо до цього числа додати 36, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.

3. Знайти три числа, якщо перше становить 80 % другого, друге відноситься до третього як 0,5 : 9/20, а сума першого і третього на 70 % більша за друге число.

4. Сума перших трьох членів пропорції дорівнює 58. Третій член становить 2/3, а другий 3/4 першого члена. Знайти четвертий член пропорції і записати її.

5. Сума квадратів цифр двозначного числа дорівнює 13, якщо від цього двозначного числа відняти 9, то дістанемо число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти число.

6. Чисельники трьох дробів пропорційні числам 1, 2, 5, а знаменники пропорційні відповідно числам 1, 3, 7. Середнє арифметичне цих дробів дорівнює 200/441. Знайти ці дроби.

7. Однозначне число збільшили на 10 одиниць. Якщо утворене число збільшити на стільки само процентів, як і першого разу, то дістанемо 72. Знайти початкове число.

6. Задачі на прогресії

Означення 6.1. Числова функція $a_n = f(n)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел, називається *числовою послідовністю (ЧП)*.

Значення послідовності $a_1, a_2, \dots, a_{n,\dots}$ називаються її *елементами (членами)*, a_n – n-ним або *загальним елементом* послідовності $\{a_n\}$. Так як *ЧП* означається як функція, то їй притаманні всі поняття і властивості як і щодо функції (способи задання, обмеженість, монотонність тощо). Але є деяка специфіка. Зокрема, *ЧП* можна задати записом кількох її перших елементів (значень функції, що задає *ЧП*), розміщених у порядку зростання номера n, тобто $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, або формулою загального елемента a_n, за допомогою якого можна обчислити кожний елемент цієї *ЧП* за її номером, або так званою *рекурентною формулою*, яка дозволяє обчислити елементи ЧП за відомими попередніми її елементами.

Наприклад, рекурентною є формула $a_n + 2 = a_n + a_n + 1$, яка засвідчує, що кожний член послідовності (починаючи з третього) дорівнює сумі двох членів, що йому передують. Одна така формула послідовності не визначає, бо невідомі її два перших члени. Якщо, крім формули, вказати і два перших члени, то послідовність можна вважати цілком заданою.

Задамо рекурентною формулою послідовність, перший і другий члени якої — одиниці, а кожний наступний дорівнює сумі двох попередніх. Цю послідовність можна задати такими рівностями:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Користуючись такою формулою, можна визначити послідовно третій, четвертий та інші члени послідовності:

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1= 2,$

$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3,$

$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5, \dots .$

Маємо послідовність: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … .

Її називають послідовністю Фібоначчі, оскільки вперше розглянув та описав її властивості в трактаті «Книга про абак» (1202 р.) Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Формулу n-го члена як функцію від n для цієї послідовності знайдено Ж. Біне тільки у XIX ст. [1].

В закладі загальної середньої освіти (ЗЗСО) вивчаються такі види *ЧП*, як *арифметична та геометрична прогресії* за програмою математики 9 класу.

Означення 6.2. Числова послідовність (a_n) називається *арифметичною прогресією*, якщо існує число d таке, що для будь якого $n \in N$ виконується рівність

$$a_{n+1} = a_n + d;$$

число d називається *різницею* арифметичної прогресії.

Можна дати і таке означення:

Означення 6.3. Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число d називають різницею арифметичної прогресії.

Інакше, арифметична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$, де $n \in N$, a і d — задані числа.

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Арифметична прогресія зростаюча, якщо її різнця додатна, або спадна — якщо її різниця від'ємна.

Означення 6.4. Числова послідовність (b_n), в якій $b_1 \neq 0$, називається *геометричною прогресією*, якщо існує число $q \neq 0$ таке, що для будь якого $n \in N$ виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q;$$

число q називається *знаменником* геометричної прогресії.

Означення 6.5. Геометричною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаю чи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число q називають знаменником геометричної прогресії.

Перший член b_1 і знаменник q геометричної прогресії можуть бути будь-якими числами, відмінними від нуля.

Інакше, геометрична прогресія — це послідовність, яку можна задати такою рекурентною формулою:

$b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$, де $n \in N$, $b \neq 0$ і $q \neq 0$ — задані числа.

Основні властивості прогресій

Арифметична прогресія	Геометрична прогресія
$a_n = a_1 + (n-1)d$ - формула загального елемента	$b_n = b_1 q^{n-1}$ - формула загального елемента
$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$ - рекурентна формула	$b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n \cdot q$ -- рекурентна формула
$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ - характеристична властивість	$\lvert b_{n+1} \rvert = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$ або $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ - характеристична властивість
$a_k + a_{n-(k-1)} = a_1 + a_n$	
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ або $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ де $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, або $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1},\ q \neq 1$ $S_n = n \cdot b_1$, якщо $q = 1$, $(S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$.

	$S=\frac{b_1}{1-q}$, якщо $\lvert q\rvert<1$, де $S=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (для нескінченно спадної ГП).

Приклад 1. Знайти трицифрове число, цифри якого утворюють арифметичну прогресію і яке ділиться на 45.

Розв'язання. Нехай x – цифра сотень, y – цифра десятків, z – цифра одиниць шуканого числа. Оскільки вони утворюють арифметичну прогресію, то, за характеристичною властивістю арифметичної прогресії, $y=\frac{x+z}{2}$. Так як шукане число кратне 45, то воно ділиться на 5 і на 9. Тому воно закінчується або на 0 або на 5, і сума його цифр ділиться на 9. Отже, є два варіанти і відповідно до цього приходимо до сукупності двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} z=0,\\ y=\dfrac{x+z}{2},\\ x+y+z=9k;\end{cases}\\ \begin{cases} z=5,\\ y=\dfrac{x+z}{2},\\ x+y+z=9k,\end{cases} \quad \text{де } k\in N.\end{array}\right.$$

З першої системи знаходимо $\begin{cases} x=2y,\\ x+y=9k.\end{cases}$

Перебравши цілі значення y від 1 до 9, переконуємося, що цій системі задовольняють лише пари (6;3), (12; 6), (18; 9). Але за змістом задачі x та y – цілі числа, які задовольняють нерівностям $1\le x\le 9,\ 0\le y\le 9$, тому цим умовам відповідає тільки пара (6;3).

З другої системи знаходимо $\begin{cases} 2y=x+5,\\ x+y=9k.\end{cases}$

Аналогічно, перебравши цілі значення y від 1 до 9, переконуємося, що другій системі задовольняють пари (1;3) і (7; 6). Отже, шукані числа 630; 135; 765.

Приклад 2. Знайти п'ятий член нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо відомо, що її сума дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5.

Розв'язання. Нехай $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ - нескінченно спадна геометрична прогресія. Тоді $\frac{b_1}{1-q}=9$. Розглянемо послідовність $b_1^2, b_2^2, \dots, b_n^2, \dots$? Члени якої також утворюють нескінченно спадну геометричну прогресія. У ній перший елемент b_1^2, а знаменник q^2. Тоді $\frac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5$.

Таким чином, маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 9, \\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2} = 40{,}5. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо $b_1 = 6, q = 1/3$. Тоді $b_5 = b_1\, q^4 = 2/27$.

Приклад 3. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо від третього числа відняти 4, то числа утворять арифметичну прогресію. Якщо ж від другого і третього членів отриманої арифметичної прогресії відняти по 1, то знову отримаємо геометричну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання. Нехай *x, y, z* – шукані числа. Так як вони утворюють геометричну прогресію, то, за характеристичною властивістю геометричної прогресії, маємо $y^2 = xz$. Далі: числа *x, y, (z-4)* є послідовними членами арифметичної прогресії, тому за характеристичною властивістю арифметичної прогресії, маємо $y = \frac{x+(z-4)}{2}$. Нарешті, три числа *x*, *(y-1), (z-5)* є послідовними членами геометричної прогресії, тоді $(y-1)^2 = x(z-5)$.

Отже, отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ y = \dfrac{x+(z-4)}{2}, \\ (y-1)^2 = x(z-5). \end{cases}$$

Вона має два розв'язки: (1; 3; 9) та (1/9; 7/9; 49/9).

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте послідовність дій для розв'язування текстових та прикладних задач за допомогою рівнянь та систем рівнянь.
2. Поясніть, як за допомогою системи рівнянь розв'язати задачу.
3. Яку послідовність називають геометричною прогресією?
4. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?
5. Який вигляд має формула n-го члена геометричної прогресії?
6. Як пов'язані між собою три послідовних члени геометричної прогресії?
7. Який вигляд має формула складних відсотків? Поясніть її.
8. Наведіть приклади числових послідовностей.
9. Сформулюйте означення числової послідовності.
10. Якими бувають числові послідовності?
11. Які послідовності називають скінченними?

12. Які послідовності називають зростаючими? А які — спадними?

13. Починаючи з якого номера всі члени послідовності, заданої формулою $c_n = n^2 + n$, більші за 100?

14. Установіть, зростаючою чи спадною є послідовність, яка задається формулою: $a_n = 1 - 2n^2$.

15. Сформулюйте означення арифметичної прогресії.

16. Що таке різниця арифметичної прогресії?

17. Як виражається n-й член арифметичної прогресії через її перший член і різницю?

18. Чому дорівнює сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців?

19. Чому дорівнює сума n перших членів арифметичної прогресії?

20. Наведіть приклад геометричної прогресії.

21. Сформулюйте означення геометричної прогресії.

22. Що таке знаменник геометричної прогресії?

23. Як виражається n-й член геометричної прогресії через її перший член і знаменник?

24. Сформулюйте властивість геометричної прогресії.

25. Чому дорівнює сума n перших членів геометричної прогресії?

Задачі для самостійного опрацювання

Приклад 1. Сума перших трьох членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 21. Якщо від перших двох членів цієї прогресії відняти по 1, а до третього члена додати 2, то одержані три члени утворюватимуть геометричну прогресію. Знайти суму восьми перших членів геометричної прогресії.

Приклад 2. Знайти суму шести перших членів арифметичної прогресії, у якої сума будь-якого числа членів дорівнює почетвереному квадрату цього числа.

Приклад 3. Відомо, що при будь-якому n сума n перших членів деякої числової послідовності $\{u_n\}$ виражається формулою $S_n = n^2 + 2n$. Знайти дев'ятий член цієї послідовності і довести, що $\{u_n\}$ є арифметичною прогресією.

Приклад 4. Перший член нескінченно спадної геометричної прогресії на 8 більший, ніж другий, а її сума дорівнює 18. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

Приклад 5. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 1,5, а сума їх квадратів — 1,125. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
2. Давидова В. Розв'язування текстових задач за системою розвивального навчання Д. Б. Ельконіна / В. Давидова // Початкова освіта. – 2002. – №17.
3. Збірник задач математики для вступників до ВТУЗІВ / За ред. М.І. Сканаві. К.: ВШ, 1994. 445 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Skanavi_1994_445.pdf
4. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. К.: Генеза, 2017. 264 с.
5. Ільчишина Т. Розв'язування текстових задач за системою розвивального навчання Д.Б.Ельконіна - В.В.Давидова / Т. Ільчишина // Початкова освіта. – 2002. – №17.– С.– 3.

6. Інтернет-ресурси:

   а) https://sites.google.com/site/tekstovizadaci/.

   б) https://vseosvita.ua/library/zbirnik-zadac-dla-pidgotovki-do-zno-z-matematiki-i-cisla-i-virazi-castina-3-tekstovi-zadaci-93204.html.

   в) https://skvor.info/publications/articles/view.html.

   г) https://maimo.elit.sumdu.edu.ua/images/stories/docs/tekstovyye-zadachi.

   д) https://www.educon.by/index.php/materials/math/tekstovye