**Обернені тригонометричні функції**

**1.Перетворення виразів, що містять обернені тригонометричні функції.**

Функції, обернені до тригонометричних – арксинус, арккосинус, арктангенс та арккотангенс.

***Арксинусом*** числа **а (arcsin a)** називається число з проміжку , синус якого дорівнює **а**.

Отже: . Виходячи з означення, можемо зробити висновки про те, що a ∈, arcsin a ∈ .

***Приклад 1***.

Знайдемо .

, бо .

***Приклад 2****.*

Знайдемо .

, бо .

*Основні властивості функції :*

1. .

2. .

3. Графік симетричний відносно початку координат (функція непарна):

4. Функція зростаюча , то .

5. , якщо.

6. ; .

**Зауваження**

При знаходженні області визначення треба пам’ятати якщо функція має вигляд , то слід вважати (арксинус визначений лише для чисел, модуль яких не перевищує 1).

***Наприклад***:

якщо , то , тобто .

***Арккосинусом*** числа **а (arccos a)** називається число з проміжку , косинус якого дорівнює **а**.

Отже: . Виходячи з означення, можемо зробити висновки про те, що  a ∈ , arccos a ∈ .

***Приклад 1***.

Знайдемо

, бо .

***Приклад 2****.*

Знайдемо .

, бо .

*Основні властивості функції :*

1. .

2..

3. Графік не симетричний ані відносно початку координат, ані відносно осі OY: .

4. Функція спадна. Якщо , то .

5. , якщо .

6., .

**Зауваження**

    При знаходженні області визначення треба пам’ятати якщо функція має вигляд , то слід вважати (арккосинус визначений лише для чисел, модуль яких не перевищує 1).

***Наприклад***:

якщо , то , тобто .

***Арктангенсом*** числа **а (arctga)** називається число з проміжку , тангенс якого дорівнює **а**.

Отже: . Виходячи з означення, можемо зробити висновки про те, що  a ∈ , arctga ∈ .

***Приклад 1***.

, бо і   ∈ ().

***Приклад 2***.

, бо  і  ∈ ().

*Основні властивості функції :*

1. .

2.

3. Графік симетричний відносно початку координат , функція непарна: .

4. Функція зростаюча. Якщо , то

5. , якщо.

6. , якщо; , якщо .

**Зауваження**

     При знаходженні області визначення треба пам’ятати якщо функція має вигляд , то слід вважати .  (тангенс чисел .  , не визначений).

***Наприклад***: якщо , то , , тобто  , .

***Арккотангенсом***числа **а (arcctg a)** називається число з проміжку  , котангенс якого дорівнює **а**.

Отже: . Виходячи з означення, можемо зробити висновки про те, що a ∈ , arсctga ∈ .

***Приклад 1***.

, бо  і .

***Приклад 2***.

  , бо  і .

*Основні властивості функції y=arcсtg x:*

1. .

2.

3. Графік не симетричний ані відносно початку координат, ані відносно осі OY: .

4. Функція спадна. Якщо , то

5, якщо .

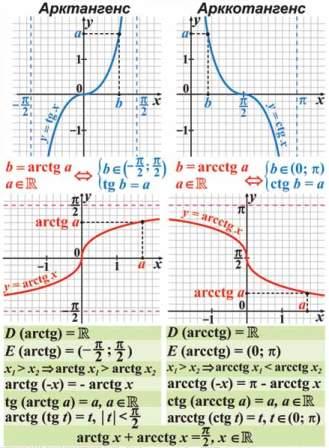
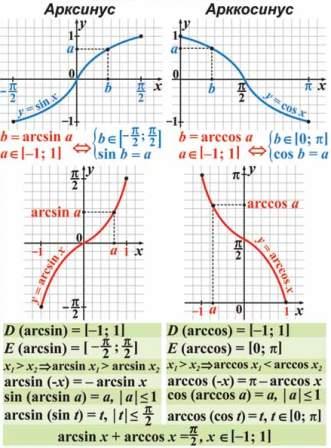
6.  для всіх .

**Зауваження**

     При знаходженні області визначення треба пам’ятати якщо функція має вигляд , то слід вважати  (котангенс чисел , не визначений).

***Наприклад***:

якщо , то  .



Наведемо  деякі властивості обернених тригонометричних функцій, що застосовуються у знаходженні значень виразів:

Завдання першого рівня складності (потребують застосування означення обернених тригонометричних функцій)

**Приклад 1:**

**Приклад 2:**

**Приклад 3:**

**Приклад 4:**

Завдання другого рівня складності ( потребують застосування основних тригонометричних тотожностей та формул перетворень тригонометричних функцій)

**Приклад 1:**

**Приклад 2:**

**2.Рівняння,що містять обернені тригонометричні функції.**

При вирішенні рівняння з аркфункціями від обох частин рівності доведеться брати деяку тригонометричну функцію . Для того щоб отримати після цього рівняння з тією ж множиною рішень, що і вихідне, зручно брати в якості функцію монотонну на перетині областей значення функції і

**Приклад 1.**

Вирішити рівняння .

**Рішення:**

Областю визначення рівняння буде відрізок ,при цьому . Тому від обох частин рівняння можна брати або котангенс, або косинус. Маємо . Обчислимо . Нехай . Тоді при і .

Звідси . Отже, отримуємо ⇔

**Відповідь:** 0.

**Приклад 2**.

Вирішити рівняння

**Рішення:**

Перетворимо рівняння

Візьмемо тангенс від обох частин рівняння

**Відповідь:** 2.

**Приклад 3.**

Розв'яжіть рівняння .

**Рішення:**

Область визначення рівняння є відрізок і при цьому

. Отже,

⇔ . Але .

Отже, ⇔ ⇔

Відповідь: .

Зауважимо, що рівняння з аркфункціями можна вирішувати, перетворюючи їх так, щоб не губилися рішення. Але тоді обов'язкова перевірка знайдених результатів на предмет відсіювання зайвих коренів.

**Приклад 4.**

Вирішіть рівняння .

**Рішення:**

Так як i , то

Отже, рівняння не має рішення.

**Приклад 5.**

Вирішіть рівняння

**Рішення:**

Візьмемо тангенс від обох частин рівняння. Тоді

або з урахуванням формули тангенса подвійного кута . Звідси або . Значення відсівається з очевидних причин. Підставимо значення у вихідне рівняння. Отримаємо справедливу , так як .

**Відповідь:** 0.

**Приклад 6**.

Вирішіть рівняння: .

**Рішення:**

Визначимо область допустимих значень змінної заданого рівняння:

Візьмемо косинус від обох частин рівняння

Так як і , тоді .

З урахуванням ОДЗ отримуємо

1. . Відповідь: .

2. . Відповідь:

3. . Відповідь:

4. . Відповідь:

5. . Відповідь:

6. . Відповідь:

7. . Відповідь:

8. . Відповідь: .

9. . Відповідь:

10. . Відповідь: .

11.. Відповідь: .

12. . Відповідь:

13. . Відповідь: .

14. . Відповідь: .

15. . Відповідь: .

16. . Відповідь:

17. . Відповідь: .

18. . Відповідь: .

**3.Нерівності, що містять обернені тригонометричні функції.**

Найпростішими нерівностями з аркфункціями є наступні співвідношення: , , , і такі ж нерівності, ліва частина в яких замінена на , ,

Розглянемо рішення нерівностей, що містять .

1. .

Якщо , то в силу визначення рішенням нерівності буде відрізок . Якщо , то беручи від обох частин нерівності синус і враховуючи, що зростає на множині , отримаємо в якості рішення відрізок . Нарешті, якщо , то в силу визначення рішень немає, тобто .

2. .

Якщо , то вирішенням нерівності є відрізок . Якщо , то знову обчислюючи синус від обох частин нерівності, отримаємо в якості рішення проміжок . Нарешті, якщо

, то , так як за визначенням не може бути більше, ніж

.

3. .

Зведемо цю нерівність до вже вивченого випадку. Для цього помножимо обидві його частини на -1 і скористаємося непарністю : ⇔ . Якщо тепер позначити: ,

, то отримаємо знайоме нерівність . Спираючись на нього, запишемо відразу відповідь для нашої нерівності:

-якщо (тобто тоді ,

-якщо (тобто ), тоді ,

-якщо (тобто , тоді .

4. .

Результат виходить аналогічно попередньому випадку:

-якщо , тоді ,

-якщо , тоді ,

-якщо , тоді .

5.Нерівності , , , зводяться до попередніх нерівностей, якщо врахувати, що .

Розглянемо рішення більш складних нерівностей з аркфункціями. Тут доведеться брати від обох частин нерівності синус (косинус) або тангенс (котангенс). Щоб при цьому множина рішень вихідної нерівності не змінювалося, треба, щоб обидві частини нерівності лежали всередині або збігалися з проміжком монотонності , , , відповідно. Якщо множина значень обох частин нерівності не вкладається в один і той же проміжок монотонності основний тригонометричної функції, то нерівність слід тотожно перетворити або виділити проміжок монотонності і вирішувати нерівність окремо на кожному такому проміжку.

**Приклад 1.**

Вирішити нерівність .

**Рішення:**

Ліва частина нерівності приймає значення на інтервалі , на якому жодна з основних функцій , , , не є монотонною. Тому перетворюємо нерівність до виду . Функція обмежена. Отже, нерівність

треба розглядати лише при тих , при яких

⇔ ⥼ ⇔ ⇔ ≺2 .

За цієї умови обидві частини нерівності приймають значення всередині відрізка , і від обох частин можна взяти тангенс:

⇔ ⇔ ⇔ .

**Відповідь:**

**Приклад 2.**

Вирішіть нерівність

**Рішення:**

Типовою помилкою при вирішенні даної нерівності є перехід до нерівності , яке не є рівносильним даному.

Насправді, допустимі значення вихідної нерівності визначаються умовою

і тільки для них . Далі, враховуючи, що , маємо

.

Тому вихідна нерівність рівносильно системі

Звідси ⇔

Так як , то і, отже,тобто .

**Відповідь:** .

**Приклад 3**.

Вирішіть нерівність .

**Рішення:**

Так як то

Звідси, тобто. Це можливо при , тобто

і, отже,

**Відповідь:** 1

1. . Відповідь: .

2. Відповідь:.

3.. Відповідь: .

4. . Відповідь: .

5. . Відповідь: .

6. . Відповідь: .

7. . Відповідь: .

8. . Відповідь: .

9. . Відповідь:.

10.. Відповідь: .

12.. Відповідь: .

13) . Відповідь:

14. . Відповідь: .

15. . Відповідь:

16. . Відповідь:

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: [підручний для 10 класу закладів загальної середньої освіти, профільний рівень] / Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С..- Харків: Гімназія, 2018. – 404 с.
2. Алгебра и начало анализа в 9-10 классах. - Москва: Просвещение, 1980.
3. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – Москва: Просвещение, 1991.
4. Зовнішнє незалежне оцінювання з математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2016, 383 с.
5. Аркфункція: від А до Я / О. С. Істер. — Вид. 2-ге. — Тернопіль : Навч. кн.—Богдан, 2012. — 175 с.

Інтернет-ресурси

1. <http://zno.academia.in.ua/mod/book/tool/print/index.php?id=3179>
2. <https://yukhym.com/uk/tryhonometriia/oberneni-tryhonometrychni-funktsii-formuly.html>
3. <https://miyklas.com.ua/p/algebra/10/trigonometrichni-funktciyi-14387/oberneni-trigonometrichni-funktciyi-profilnii-14406>