**Методи розв’язування планіметричних задач**

**Мета:**

* засвоїти знання здобувачів вищої освіти з планіметрії, розглянути методи розв’язання планіметричних задач;
* розвивати пам'ять та наукове мислення здобувачів вищої освіти;
* виховувати культуру математичного запису, виховувати графічну культуру здобувачів вищої освіти.

**При вивченні теми здобувачі вищої освіти повинні:**

знати: методи розв’язання планіметричних задач;

вміти: використовувати методи при розв’язанні планіметричних задач;

**Обладнання:** дидактичний матеріал, креслярські матеріали, мультимедійний проект, мультимедійна дошка, комп’ютер.

**Час:** 2 год.

**План лекції**

1. Метод допоміжного відрізка
2. Метод допоміжної площі
3. Метод допоміжного кута
4. Метод допоміжного периметру і об’єму

**Список літератури**

1. *Нелин Е.П.* Геометрия в таблицах: Учебное пособие для учащихся старших классов / Е.П. Нелин. – Х.: Мир детства, 1996. – 64 с.
2. *Нелін Є.П.* Геометрія. 10 клас. Дворівневий підручник: академічний і профільний рівні / Є.П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 240 с.
3. Кушнір І.А. Методи розв’язування задач з геометрії: книга для вчителя / І.А. Кушнір – К.:Абрис, 1994. – 464 с.
4. *Бевз Г.П.* Геометрія чотирикутника / Г.П. Бевз. – Х.: Основа, 2003. – 80 с.
5. *Єршова А.П.* Геометрія. 10 клас. Академічний рівень /
А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов. – Х.: Ранок, 2010. – 240 с.

**Логічна структура лекції**

**Метод допоміжного відрізка**

При розв’язанні багатьох задач пропонуємо введення допоміжних елементі, які безпосередньо не задачі в умові задачі. За їх допомогою складається рівняння, де невідомим буде шуканий елемент або елемент, потрібний для його пошуку. Іноді за допомогою цього елемента конструюється не рівняння, а співвідношення, якого потребує умова задачі.

Розглянемо допоміжний елемент – відрізок (або відношення довжин відрізків). Його зручно вести, якщо фігури подібні. Тоді за допомогою пропорцій або геометричних побудов складається рівняння, в якому цей елемент як член рівняння скорочується, а знайти шуканий стає важко.

**Задача 1.** Основи трапеції – *a* і *b* (*a<b*). Пряма, яка перетинає бічні сторони трапеції в точках *M* і *N*, проходить через точку перетину діагоналей паралельно основам. Знайти довжину відрізка *MN*.

***Розв’язання.*** Введемо як допоміжні елементи *h1, h2, h* – висоти трикутників відповідно *МВО* і *ABD* і BCA (рис. 1).



Позначимо *х* відрізок *МО*. Трикутники *МВО* і *ABD* – подібні:

$$\frac{x}{a}=\frac{h\_{1}}{h}$$

З подібності трикутників AMO і ABC випливає:

$$\frac{x}{b}=\frac{h\_{2}}{h}$$

Отже, $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h\_{1}+h\_{2}}{h}$. Але $h\_{1}+h\_{2}=h$, тому $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h\_{1}+h\_{2}}{h}=1$; $x=\frac{ab}{a+b}$

Маємо $ON=y=\frac{ab}{a+b}$ обчислюється аналогічно.

**Метод допоміжної площі**

Введення площі як допоміжного eлeмeнта аналогічне введенню лінійного eлeмeнта — відрізка. Порівнюючи площі фігур, можна дістати рівняння відносно невідомих задачі або необхідне співвідношення у вигляді формули. Краще знаходити чи порівнювати ті площі, сума (різниця) яких дає площу заданої фігури, у яких лінійні eлeмeнти — шукані, або є компонентами співвідношення у вигляді формули.

**Задача 1.** У трикутнику *АВС* вписанотри півкола радіусів Ra, Rb, Rc (їх діаметри належать відповідним сторонам), *r* – радіус вписаного кола. Довести, що $\frac{1}{R\_{a}}+\frac{1}{R\_{b}}+\frac{1}{R\_{c}}=\frac{2}{r}$.

***Доведення.*** Доведемо, що (рис. 2) $R\_{a}=\frac{2S}{2p-a}$.



Справді, $S=S\_{AO\_{1}C}+S\_{AO\_{1}B}=\frac{1}{2}R\_{a}∙b+\frac{1}{2}R\_{a}∙c=\frac{1}{2}R\_{a}(b+c)$. Звідси дістанемо формулу $R\_{a}=\frac{2S}{2p-a}$. Аналогічно, $R\_{b}=\frac{2S}{2p-b}$, $R\_{c}=\frac{2S}{2p-c}$ (*p* – півпериметр трикутника *АВС*).

Отже, $\frac{1}{R\_{a}}+\frac{1}{R\_{b}}+\frac{1}{R\_{c}}=\left(2p-a+2p-b+2p-c\right)∙\frac{1}{2S}=\frac{2p}{S}=\frac{2}{r}$.

**Метод допоміжного кута**

Застосування кута як допоміжного eлeмeнта пов'язано з тригонометрією. Теореми синусів, косинусів, розв'язання трикутників дозволяють звести задачу до доведення тригонометричної тотожності, тригонометричних нерівностей або до розв'язання рівнянь чи нерівностей.

**Задача 1.** Довести, що в трикутнику *АВС* $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$, де *D* – точка перетину бісектриси кута *ВАС* зі стороною *ВС*.



***Доведення.*** Введемо позначення (рис. 3) $∠DAB=α; ∠ADB=β$.

За теоремою синусів з трикутника *ADB* дістанемо $\frac{AB}{BD}=\frac{\sin(β)}{\sin(α)}$.

З трикутника *CAD* випливає $\frac{AC}{DC}=\frac{\sin((180°-β))}{\sin(α)}, або\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(β)}{\sin(α)}$.

Отже, $\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{BD}$.

**Метод допоміжного периметра і об’єму**

При застосуванні периметра як допоміжного елемента пропонуємо дві теореми.

**Теорема 1.** В трикутник *АВС* вписано коло: *К1, К2, К3* – точки дотику до сторін *ВС*, *АС*, *АВ*. Довести, що $AR\_{3}=AK\_{2}=p-a$

$$BK\_{1}=BK\_{3}=p-b$$

$$CK\_{1}=CK\_{2}=p-c$$



***Доведення.*** Нехай $AK\_{3}=x, BK\_{1}=y, CK\_{1}=z$ (рис. 4). Тоді $x=c-y,$

$$x=b-z, 2x=b+c-\left(y+z\right)=b+c-a=2p-2a;x=p-a.$$

Аналогічно доводиться, що $y=p-b, z=p-c.$

**Теорема 2.** Довести, що відстані від точок дотику зовні вписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника *АВС* до їх спільної вершини, дорівнюють півпериметру трикутника *АВС*.

***Доведення.*** Нехай, наприклад, зовні вписане коло з центром *Ia* дотикається до продовжень сторін *АВ* і *ВС* трикутника *АВС* у точках *Т2* і *Т3* (рис. 5). Крім того, $CT\_{1}=x, T\_{1}B=y.$



Маємо $AT\_{2}=c+y, AT\_{3}=b+x, 2p=a+b+c=x+y+b+c=b+x+c+y=AT\_{2}+AT\_{3}. $ Але $AT\_{2}=AT\_{3}$, тому $2AT\_{2}=2p$, звідси $AT\_{2}=AT\_{3}=p.$

**Задача 1.** Довести, що відрізок *АК1* (так само як і відрізки *ВК2* і *СК3*) розбиває трикутник на такі два трикутники, що вписані в них кола дотикаються одне до одного.



***Доведення.*** Припустимо, що кола, вписані в трикутники *АК1В* та *АК1С* не дотикаються одне до одного (рис. 6). Позначимо $T\_{1}, T\_{2}, T\_{3}, T\_{4}, T\_{5}, T\_{6}$ точки дотику кожного з кіл зі сторонами цих трикутників. Нехай також $T\_{1}B=y, T\_{2}A=u, T\_{3}T\_{4}=l, T\_{5}C=t, T\_{4}K\_{1}=x.$

Тоді $t+x+l+x+y+y+u+l+u+t=2p, $

або $l+u=p-\left(x+y+t\right). $Але $x+t=p-c, а y+u=c.$ Таким чином, $l+u=p-\left(p-c+y\right)=c-y=u.$ Отже, $l=0$, і точки *Т3* та *Т4* збігаються.