Раціональні нерівності та їх системи

ЗМІСТ

Тема 2. Цілі раціональні нерівності з однією змінною. Метод інтервалів 2

2.1. Лінійні нерівності з однією змінною 2

2.2. Квадратичні нерівності 4

2.3. Метод інтервалів розв'язування нерівностей 7

2.4. Раціональні нерівності вищих степенів 10

2.5. Метод заміни змінної при розв'язуванні раціональних нерівностей 17

3. Дробово-раціональні нерівності 18

3.1. Загальні поняття 18

3.2. Метод інтервалів розв'язування дробово-раціональних нерівностей 18

Завдання для самостійної роботи 19

3.3. Розв'язування дробово-раціональних нерівностей з параметрами 24

4. Системи раціональних нерівностей 28

4.1. Системи нерівностей з однією змінною 28

4.2. Системи нерівностей з двома змінними 30

4.2.1. Рівняння з двома змінними 30

4.2.2. Нерівності з двома змінними 31

4.3. Система нерівностей з двома змінними 35

Питання для самоконтролю 36

Контрольна робота № 3 38

Список використаних та рекомендованих джерел 39

Тема 2. Цілі раціональні нерівності з однією змінною. Метод інтервалів

2.1. Лінійні нерівності з однією змінною

Означення 1. Нерівності вигляду $f_1(x) > f_2(x)$ або $f_1(x) < f_2(x)$, де $f_1(x), f_2(x)$ – лінійні функції, називаються нерівностями першого степеня або лінійними нерівностями з одним невідомим.

Означення 2. Областю визначення нерівності $f_1(x) > f_2(x)$ $\left(f_1(x) < f_2(x)\right)$ називається множина всіх таких значень x, при яких і вираз $f_1(x)$, і вираз $f_2(x)$ визначені. Іншими словами, область визначення нерівності $f_1(x) > f_2(x)$ $\left(f_1(x) < f_2(x)\right)$ – це перетин областей визначення виразів $f_1(x)$ та $f_2(x)$.

*Означення 3.*Частинним розв'язком нерівності $f_1(x) > f_2(x)$ $\left(f_1(x) < f_2(x)\right)$ називається будь-яке значення змінної x, яке її задовольняє.

Означення 4. Розв'язком нерівності називається множина всіх її частинних розв'язків.

Означення 5. Дві нерівності з однією змінною x називаються рівносильними, якщо їхні розв'язки збігаються.

Теорема 1. Якщо до обох частин нерівності додати один і той самий вираз $\varphi(x)$, який визначений при всіх значення x з області визначення початкової нерівності, і при цьому залишити знак нерівності без змін, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Таким чином, нерівності

$$f_1(x) > f_2(x) \text{ і } f_1(x) + \varphi(x) > f_2(x) + \varphi(x)$$

або

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ і } f_1(x) + \varphi(x) < f_2(x) + \varphi(x)$$

рівносильні, якщо $\varphi(x)$ задовольняє умові теореми.

Наслідок 1. Нерівності

$$f_1(x) + \varphi(x) > f_2(x) \text{ і } f_1(x) > f_2(x) - \varphi(x)$$

рівносильні.

Теорема 2. Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на один і той же вираз $\varphi(x)$, який при всіх x з області визначення початкової нерівності приймає лише додатні значення, і при цьому залишити знак нерівності без змін, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Таким чином, якщо $\varphi(x) > 0$, то нерівності

$$f_1(x) > f_2(x) \text{ і } f_1(x) \cdot \varphi(x) > f_2(x) \cdot \varphi(x)$$
$$\left(\text{або } \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} > \frac{f_2(x)}{\varphi(x)}\right)$$

або

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ і } f_1(x) \cdot \varphi(x) < f_2(x) \cdot \varphi(x)$$
$$\left(\text{або } \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} < \frac{f_2(x)}{\varphi(x)}\right)$$

рівносильні.

Наслідок 2. Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на одне й те ж невід'ємне число, зберігши знак нерівності, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Теорема 3. Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на один і той же вираз $\varphi(x)$, який при всіх x з області визначення початкової нерівності приймає лише від'ємні значення, і при цьому знак нерівності змінити на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Таким чином, якщо $\varphi(x) < 0$, то нерівності

$$f_1(x) > f_2(x) \text{ і } f_1(x) \cdot \varphi(x) < f_2(x) \cdot \varphi(x)$$
$$\left(\text{або } \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} < \frac{f_2(x)}{\varphi(x)}\right)$$

або

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ і } f_1(x) \cdot \varphi(x) > f_2(x) \cdot \varphi(x)$$
$$\left(\text{або } \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} > \frac{f_2(x)}{\varphi(x)}\right)$$

рівносильні.

Наслідок 3. Якщо обидві частини нерівності помножити (або поділити) на одне й те ж від'ємне число, змінивши знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Будь-яку лінійну нерівність можна подати у вигляді

$$ax + b > 0. \tag{1}$$

Алгоритм розв'язання нерівності $ax + b > 0$:

а) якщо $a > 0$, то за наслідком 2, після, того як помножимо обидві частини нерівності на $\frac{1}{a} > 0$, отримаємо рівносильну даній нерівність $x + \frac{b}{a} > 0$, із якої випливає, що

$$x > -\frac{b}{a};$$

б) якщо $a < 0$, то за наслідком 3, після, того як помножимо обидві частини нерівності на $\frac{1}{a} < 0$, отримаємо рівносильну даній нерівність $x + \frac{b}{a} < 0$, із якої випливає, що

$$x < -\frac{b}{a};$$

в) якщо $a = 0$, то при $b \leq 0$ для будь-якого дійсного значення x нерівність перетворюється в неправильну і розв'язку не має, а при $b > 0$ дана нерівність справджується при всіх дійсних значеннях x, тобто всі дійсні числа є розв'язками нерівності.

Зауваження 1. Нерівність $ax + b > 0$ можна представити у вигляді $-ax - b > 0$, помноживши обидві її частини на -1.

Розглянемо двочлен

$$ax + b \quad a \neq 0.$$

Знайдемо корені або нулі двочлена (значення x, при яких $ax + b = 0$):

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Подамо двочлен у вигляді

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right) \ \ a \neq 0;$$

при $a > 0$ двочлен буде невід'ємним, якщо $x + \frac{b}{a} > 0$ (тобто при $x > -\frac{b}{a}$), і від'ємним, якщо $x + \frac{b}{a} < 0$ (тобто при $x < -\frac{b}{a}$).

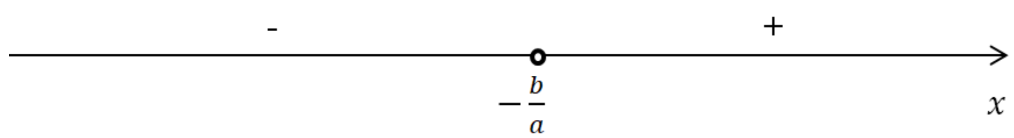


Рис. 1

Висновок. Якщо $a > 0$, то двочлен $ax + b$ невід'ємний при значеннях x, більших за корінь, і від'ємний при значеннях x, менших за корінь (при $a < 0$ - навпаки).

Геометрично це означає, що при $a > 0$ двочлен $ax + b$ невід'ємний справа і від'ємний зліва від свого кореня (рис. 1).

2.2. Квадратичні нерівності

Означення 6. Нерівності виду

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ або } ax^2 + bx + c < 0 \ (a \neq 0) \qquad (2)$$

називаються нерівностями другого степеня з однією змінною.

Алгоритм розв'язання нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ при $a \neq 0$:

а) якщо $a > 0$, то за наслідком 2, після, того як помножимо обидві частини нерівності на $\frac{1}{a} > 0$, отримаємо рівносильну даній нерівність

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} > 0$$

або

$$x^2 + px + q > 0, \ . \qquad (3)$$

де $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$

б) якщо $a < 0$, то за наслідком 3, після, того як помножимо обидві частини нерівності на $\frac{1}{a} < 0$, отримаємо рівносильну даній

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$$

або

$$x^2 + px + q < 0. \qquad (4)$$

Зауваження 2. Аналогічно можна подати нерівність

$$ax^2 + bx + c < 0 \ (a \neq 0)$$

до (3) або (4).

Розглянемо тричлен

$$x^2 + px + q.$$

1. Якщо $D = p^2 - 4q > 0$, то тричлен $x^2 + px + q$ можна розкласти на множники з дійсними коефіцієнтами

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

де $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ та $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ – корені тричлена $(x_1 < x_2)$.

Якщо $x < x_1 < x_2$, то $x - x_1 < 0$ та $x - x_2 < 0$; тоді $x^2 + px + q > 0$.

Якщо $x_1 < x < x_2$, то $x - x_1 > 0$ та $x - x_2 < 0$; тоді $x^2 + px + q < 0$.

Якщо $x > x_2 > x_1$, то $x - x_1 > 0$ та $x - x_2 > 0$; тоді $x^2 + px + q > 0$.

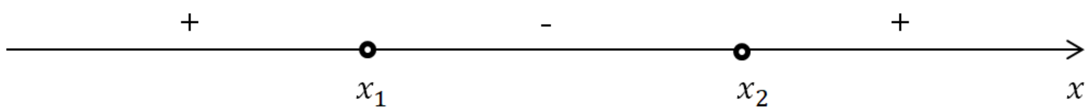


Рис. 2

Висновки. 1. Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен $x^2 + px + q$ невід'ємний при значеннях x менших за менший корінь та більших за більший корінь, і від'ємний при значеннях x, які лежать між коренями (рис. 2).

2. Якщо $D = p^2 - 4q = 0$ $\left(q = \frac{p^2}{4}\right)$, то тричлен приймає вигляд

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

і при всіх $x\neq-\frac{p}{2}$ буде невід'ємним, а при $x=-\frac{p}{2}$ рівний нулю.

3. Якщо $D=p^2-4q<0$, то тричлен можна подати у вигляді

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

Так як $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\geq 0$ при всіх x, а $p^2-4q>0$,то тричлен невід'ємний при всіх значеннях x.

Правило. Для того, що розв'язати квадратну нерівність

$x^2+px+q>0$ або $x^2+px+q<0$,

можна тричлен x^2+px+q розкласти на множники, коренями цих множників розбити всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана, визначити знак тричлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному з проміжків (рис.2) та об'єднати проміжки, на яких тричлен задовольняє множину розв'язків.

Якщо квадратний тричлен не розкладається на множники, то друга нерівність не має розв'язків; розв'язками першої нерівності будуть всі дійсні числа , якщо тричлен не має дійсних коренів; якщо тричлен має один дійсний корінь, то розв'язками будуть всі, за винятком цього кореня, дійсні числа.

2. Нехай потрібно розв'язати нерівність $ax^2+bx+c>0$ (аналогічні міркування проводяться при розв'язуванні нерівностей $ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0$). У залежності від знака дискримінанта квадратного тричлена $D=b^2-4ac$ потрібно розглянути два випадки:

1) Якщо $D<0$, а старший коефіцієнт *a* додатний, то при всіх значеннях *x* виконується нерівність $ax^2+bx+c>0$.

2) Якщо $D\geq 0$, то для розв'язання нерівності $ax^2+bx+c>0$ потрібно розкласти квадратний тричлен ax^2+bx+c на множники за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, потім поділити обидві частини нерівності $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ на число *a*, зберігши знак нерівності, якщо $a>0$, і змінивши знак нерівності на додатний, якщо $a<0$, і перейти до нерівності $a(x-x_1)(x-x_2)>0$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^2-5x+6>0$.

Розв’язання

Розв’язавши квадратне рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, одержимо корені $x_1 = 2, x_2 = 3$. Тоді квадратний тричлен розкладеться на такі множники: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Звідси,

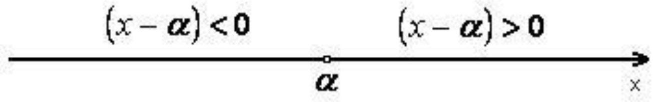
$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-3 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 < 0, \\ x-3 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 2, \\ x > 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x < 3; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

2.3. Метод інтервалів розв’язування нерівностей

Квадратні нерівності, а також нерівності вищих степенів можна розв’язувати **методом інтервалів (методом проміжків).** В його основі лежить така властивість двочлена $(x - \alpha)$ а саме: точка $x = \alpha$ ділить числову вісь на дві частини – праворуч від точки a двочлен $(x - \alpha) > 0$, а ліворуч від точки a $(x - \alpha) < 0$.



Метод інтервалів полягає у наступному:

1. Зображуємо координатну пряму, яку наносимо всі числа a_i. Ці числа, розташовані в порядку зростання, і розіб'ють координатну пряму на (n+1) проміжків знаковості функції $f(x)$.
2. Таким чином, визначивши знак $f(x)$ у будь-якій точці кожного проміжку (зазвичай ця точка вибирається із зручності арифметичних дій), визначаємо знак функції на кожному проміжку. **Головне при цьому не підставляти у функцію самі межі проміжків.**
3. Виписуємо у відповідь усі проміжки, знак функції у яких відповідають основній умові нерівності.

Слід зазначити, що необов'язково досліджувати знак функції на кожному проміжку підстановкою деякого значення з цього проміжку. Достатньо визначити таким чином знак функції тільки на одному проміжку (зазвичай на крайньому правому), а потім рухаючись від цього проміжку вліво вздовж числової осі, можна чергувати знаки проміжків за принципом:

- Якщо дужка, з якої взяте число, через яке ми переходимо, стоїть у **непарному** степені, то при переході через відповідну точку знак нерівності **змінюється**.

- А якщо відповідна дужка стоїть у **парному** степені, то при переході через відповідну точку знак нерівності **не змінюється**.

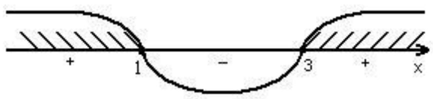
При цьому слід враховувати ще й такі зауваження:

- У строгих нерівностях (знаки "менше" або "більше") межі проміжків ніколи не входять у відповідь, а на числовій осі вони зображуються виколотими точками.
- У нестрогих нерівностях (знаки "менше або дорівнює" або "більше або дорівнює") межі проміжків, які взяті з чисельника, **завжди входять у відповідь** і зображуються зафарбованими точками (оскільки в цих точках функція дійсно обертається в нуль, що задовольняє умові).
- А ось межі, взяті зі знаменника, у нестрогих нерівностях завжди зображуються виколотими точками і у **відповідь ніколи не входять** (оскільки в цих точках у нуль обертається знаменник, що неприпустимо).
- Якщо у всіх нерівностях одна й та сама дужка є і в чисельнику і в знаменнику, то скорочувати на цю дужку не можна. Потрібно зобразити відповідну точку виколотою на осі, і не забути виключити з відповіді. При цьому при чергуванні знаків проміжків, проходячи через цю точку, знак міняти не потрібно.

Приклад 2. Розв’язати нерівність $(x-1)(x-3)>0$.

Розв’язання

Многочлен $f(x)=(x-1)(x-3)$ перетворюється в нуль у точках $x=1, x=3.$ Ці точки розбивають координатну пряму на проміжки ($-\infty;$ 1), (1; 3), (3; $+\infty$), усередині кожного з яких функція $f(x)$ зберігає знак.



Оскільки в проміжку (3; $+\infty$) співмножники $(x-1),\ (x-3)$ додатні, то їхній добуток додатний, тобто $f(x)>0$. Відзначимо проміжок (3; $+\infty$) знаком “+”. Далі знаки в проміжках чергуються. Проводимо через визначені точки “криву знаків”. На тих проміжках, де ставиться знак “+”, виконується нерівність $f(x)>0$; на тих проміжках, де знак “– “, виконується нерівність $f(x)<0$. Отже, розв’язком початкової нерівності є об’єднання проміжків: ($-\infty;$ 1) і (3; $+\infty$).

Відповідь: $x\in$ ($-\infty;$ 1)$\cup$(3; $+\infty$).

Приклад 3. Розв’язати нерівність $x^2+4x+20<0$.

Розв’язання

Якщо прирівняти до нуля многочлен $f(x) = x^2 + 4x + 20$, то дискримінант виявиться від'ємним. А це означає, що квадратний тричлен додатний при всіх дійсних значеннях змінної *x*, тому при $f(x) < 0$ нерівність розв'язків не має.

Відповідь: нерівність розв'язків не має.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 8x + 16 > 0$.

Розв'язання

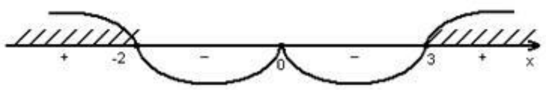
Многочлен $f(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$ є невід'ємним при будь-якому дійсному значенні змінної *x,* тому нерівність $(x-4)^2 > 0$ справджується при всіх дійсних значеннях змінної *x*, крім 4.

Відповідь: $x \in (-\infty;4) \cup (4;\infty)$.

Приклад 5. Розв'язати нерівність $x^2(x+2)(x-3) \geq 0$.

Розв'язання

Коренями многочлена $f(x) = x^2(x+2)(x-3)$ є точки $x = 0,\ x = -2,\ x = 3$. Ці точки розбивають координатну пряму на чотири проміжки. Оскільки даний многочлен містить множник у парному степені – це x^2, то при переході «кривої знаків» через "0" знак не буде змінюватись. Зазначимо, що точка $x = 0$ входить у множину розв'язків, тому що при $x = 0$ дістаємо $0 \leq 0$.

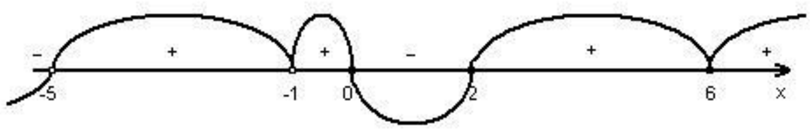


Відповідь: $x \in (-\infty;\ -2] \cup \{0\} \cup [3;\ \infty)$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{(x-6)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} \geq 0.$

Розв'язання

Наносимо точки $x =$ 6; 2; 0; –1; –5 на числову вісь. Відзначимо точки $x = -1$ і $x = 6$, при переході через які «кривої-змійки знаків» знаки не будуть змінюватись. За допомогою «кривої знаків» дістаємо розв'язки, які позначені на рисунку зі знаком «+».



Відповідь: $x \in (-5;\ -1) \cup (-1;\ 0] \cup [2;\ \infty)$.

Основні методи розв'язування раціональних нерівностей

У таблиці наведено схеми розв'язування деяких типових нерівностей [Нелін 11].

Розв'язування нерівностей

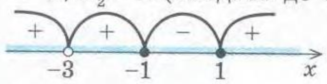
за допомогою **рівносильних перетворень**	за допомогою **методу інтервалів ($f(x) \gtrless 0$)**
Урахування ОДЗ початкової нерівності ① ↓↑ ② Збереження на ОДЗ правильної нерівності при прямих і зворотних перетвореннях	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ. 4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.

① — початкова нерівність;

② — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План	Приклад
1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ. 4. Записати відповідь, ураховуючи знак заданої нерівності.	Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$. *Розв'язання* ▶ Нехай $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)^2}$. 1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$. 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (входять до ОДЗ). 3.  *Відповідь:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

2.4. Раціональні нерівності вищих степенів

Означення 7. Нерівність виду

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 > 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{5}$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 < 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{6}$$

називається цілою раціональною нерівністю n-го степеня з одним невідомим.

Розглянемо загальний алгоритм розв'язку нерівності (5)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 > 0 \ \ (a_n \neq 0)$$

Многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

над полем дійсних чисел R завжди і єдиним способом можна представити у вигляді добутку деякого дійсного числа, що не дорівнює нулю, і незвідних над полем дійсних чисел R многочленів зі старшим коефіцієнтом, який дорівнює 1, тобто

$$f(x) = a(x - x_1)^{s_1}(x - x_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{s_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{r_m}, \qquad (7)$$

де $a \in$ R$, a \neq 0;\ s_1, s_2, \ldots, s_k, r_1, r_2, \ldots, r_m \in N$.

Причому квадратні тричлени $x^2 + p_i x + q_i$, де $i = \overline{1, m}$, мають $D < 0$.

Незвідними над полем R є многочлени 1-го степеня і многочлени 2-го степеня з від'ємним дискримінантом.

Нерівність (5) можна подати у вигляді

$$a(x - x_1)^{s_1}(x - x_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{s_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{r_m} > 0,$$

яка рівносильна нерівності

$$a(x - x_1)^{s_1}(x - x_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{s_k} > 0. \qquad (8)$$

Множники лівої частини нерівності з непарними показниками степеня можна лишити в першому степені, а з парними – опустити, виписавши ті значення x, за яких вони перетворюються в нуль. Тоді нерівність матиме вигляд

$$a(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j_l}) > 0;$$

при $a > 0$ вона рівносильна нерівності

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j_l}) > 0, \qquad (9)$$

при $a < 0$ вона рівносильна нерівності

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j_l}) < 0. \qquad (10)$$

Правило. Щоб знайти розв'язок нерівності (9) або (10) потрібно:

1. Знайти корені многочлена записаного в лівій частині нерівності.

2. Знайденими коренями розбити всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана.

3. Визначити знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному з проміжків.

4. Об’єднати проміжки, на яких многочлен $f(x)$ задовольняє множину розв’язків.

Зауваження 3. Аналогічно можна розв’язати нерівність (6).

Зауваження 4. Даний алгоритм розв’язку нерівностей називається методом інтервалів (геометричний метод розв’язку нерівностей).

Приклад 7. Розв’язати нерівність

$$(x-1)(x+7)(x-4)>0.$$

Розв’язання.

1. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

$$x-1=0; \qquad x=1;$$
$$x+7=0; \qquad x=-7;$$
$$x-4=0; \qquad x=4.$$

2. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

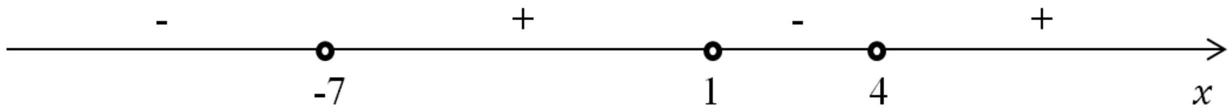


Рис. 3

3. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 3).

4. Запишемо відповідь: $x \in (-7;1) \cup (4;+\infty)$.

Приклад 8. Розв’язати нерівність

$$(x+2)^3(x-5)(x+4)^7 \leq 0.$$

Розв’язання.

1. Дана нерівність еквівалентна нерівності

$$(x+2)(x-5)(x+4) \leq 0.$$

2. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

$$x+2=0; \qquad x=-2;$$
$$x-5=0; \qquad x=5;$$
$$x+4=0; \qquad x=-4.$$

3. Знайденими коренями розіб'ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

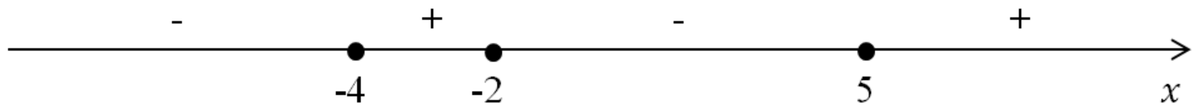


Рис. 4

4. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 4).

5. Відповідь: $x \in [-\infty; -4) \cup [-2; 5]$.

Приклад 9. Розв'язати нерівність

$$(x+3)(x-4)(x+5)^2 \geq 0.$$

Розв'язання.

1. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

$$x+3=0; \qquad x=-3;$$

$$x-4=0; \qquad x=4;$$

$$x+5=0; \qquad x=-5.$$

2. Знайденими коренями розіб'ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

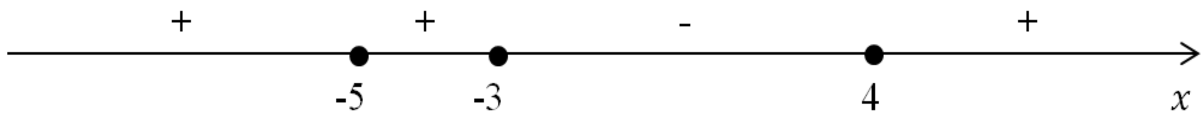


Рис. 5

3. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 5).

4. Відповідь: $x \in [-\infty; -3) \cup [4; +\infty]$.

Приклад 10. Розв'язати нерівність

$$(x+1)^3(x-2)(x+3)^4(x+4)^6 \leq 0.$$

Розв'язання.

1. Дана нерівність еквівалентна нерівності

$$(x+1)(x-2)(x+3)^2(x+4)^2 \leq 0.$$

2. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

$$x+1=0; \qquad x=-1;$$

$$x-2=0; \qquad x=2;$$

$$x + 3 = 0; \qquad x = -3;$$

$$x + 4 = 0; \qquad x = -4.$$

3. Знайденими коренями розіб'ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

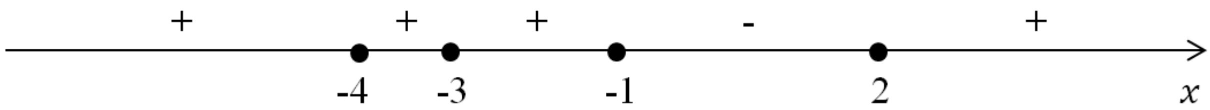


Рис. 6

4. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності на кожному проміжків (рис. 6).

5. Відповідь: $x \in \{-4; -3\} \cup [-1; 2]$.

Приклад 11. Розв'язати нерівність

$$-3(x-1)^2(2-x)^5(3-5x-2x^2)^3(x^2+x+2) > 0.$$

Розв'язання.

1. Дана нерівність еквівалентна нерівності

$$(x-1)^2(2-x)(3-5x-2x^2)(x^2+x+2) < 0.$$

2. Випишемо окремо квадратні тричлени та розкладемо їх на множники:

а) $x^2 + x + 2 = 0; \qquad D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 8 = -7 < 0.$

Оскільки $D < 0$, то над полем R цей квадратний тричлен на множники не розкладається. Він на всій числовій прямій одного знаку (рис.7)

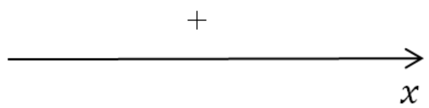


Рис.7

$\forall x \in \mathrm{R};\ x^2 + x + 2 > 0$

б) $-2x^2 - 5x + 3 = -2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right);$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49 > 0.$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{12}{-4} = -3;$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

3. $-2(x-1)^2(2-x)(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0;$

$$(x-1)^2(2-x)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) > 0.$$

4. Знайдемо корені многочлена записаного в лівій частині нерівності

$$x-1=0; \qquad x=1;$$

$$2-x=0; \qquad x=2;$$

$$x+3=0; \qquad x=-3;$$

$$x-\frac{1}{2}=0; \qquad x=\frac{1}{2}.$$

5. Знайденими коренями розіб’ємо всю числову пряму на проміжки, враховуючи при цьому строга чи нестрога нерівність задана

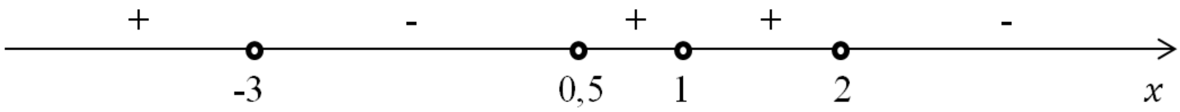


Рис. 8

6. Визначимо знак многочлена, записаного в лівій частині нерівності, на кожному проміжків (рис. 8).

5. Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2)$.

За [Мерзляк 11, Тарасенковою 11, Неліним 11] основними методами розв’язуванням нерівностей є:

Метод рівносильних перетворень

Метод інтервалів

Нехай нулі функції та її точки розриву розбивають область визначення функції на деякі проміжки (рис1). Тоді з наслідку теореми Больцано—Коші випливає, що ці проміжки є проміжками знакосталості функції. Визначити знак функції на кожному з таких проміжків можна за допомогою «пробних точок».

Ці міркування є основою для розв’язування широкого класу нерівностей.

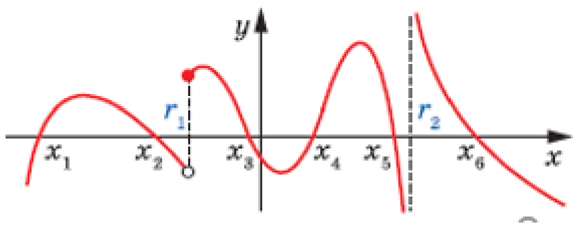


Рис. 1

Застосування властивостей функцій

Під час розв’язування нерівностей можна використати таку властивість функції, як неперервність. Нерідко ключем до розв’язування можуть бути й інші властивості функцій: періодичність, парність (непарність), зростання (спадання), найбільше і найменше значення функції тощо.

Наприклад, якщо $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$ і $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$, то множиною розв’язків кожної з нерівностей $f(x) \geqslant a$ і $f(x) \leqslant b$ є множина *D* (*f*) (рис. 2).

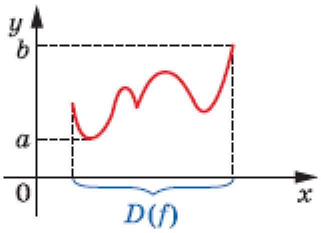


Рис. 2

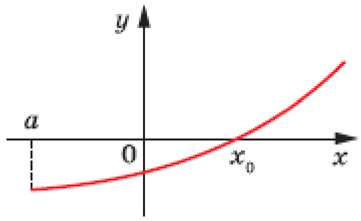


рис. 3

Якщо функція *f* зростає на проміжку $D(f) = [a; +\infty)$ і $f(x_0) \geq 0$, то множиною розв’язків нерівності $f(x)$l0 є проміжок $[x_0; +\infty)$ (рис. 3).

Метод введення нової змінної (заміна змінних)

Графічний метод

Завдання

Розв’язати нерівності:

1. $(x-1)(x+3)(x-5)(2x+7) > 0$, $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup (-3; 1) \cup (5; +\infty)$;
2. $(3x+1)(x-2)(x+7) \leq 0$, $x \in (-\infty; -7] \cup \left[-\frac{1}{3}; 2\right]$;
3. $(x+2)^3(x-3)(x+5)^7 \geq 0$, $x \in [-5; -2] \cup [3; +\infty)$;
4. $(x+3)^5(2x-3)^{11}(x-7)^{13} < 0$, $x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{2}; 7\right)$;
5. $2(x-4)(x+7)(x^2+x-6) \geq 0$, $x \in (-\infty; -7) \cup [-3; 2] \cup [4; +\infty)$;
6. $-7(x+5)(2x-1)(x^2+6x) < 0$, $x \in (-\infty; -6) \cup (-5; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
7. $(x+1)^5(x-1)(4x^2-9) \geq 0$, $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [-1; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$;
8. $(x-8)^7(x+6)^5(3x^2+2x-8) \leq 0$, $x \in [-6; -2] \cup \left[\frac{4}{3}; 8\right]$;
9. $(x+3)(2x-5)(-3x^2+5x-4) > 0$, $x \in \left(-3; \frac{5}{2}\right)$;
10. $(5x-2)^3(4x+1)^7(x^2-x+5) < 0$, $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{2}{5}\right)$;
11. $(x-5)(x+2)^2(x-7) \leq 0$, $x \in \{-2\} \cup [5; 7]$;
12. $(3x+4)^4(x-1)^6(5x-7) \geq 0$, $x \in \left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [1; +\infty)$;
13. $x^2(x+6)(x-1)^3(x+1)^4 < 0$, $x \in (-6; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1)$;

14. $(x-2)^5(x+4)^4(x^2-5x+4) \le 0,$ $\qquad x \in (-\infty; 1] \cup [2; 4]$

15. $3(x-3)^2(4-x)^3(2-3x-2x^2)^5(x^2+x+3) > 0,$

$$x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; 4);$$

16. $-2x^2(x+3)^7(24x^2+14x-5)(2x^2+x+3) \le 0,$

$$x \in \left(-\infty; -3\right] \cup \left[-\frac{5}{6}; \frac{1}{4}\right];$$

17. $x^3-6x^2+5x+12 \le 0,$ $\qquad x \in (-\infty; -1] \cup [3; 4];$

18. $(x^2-2x+3)(x^3+2x^2-5x-6) < 0,$ $\qquad x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 2);$

19. $x^4+6x^3+11x^2+6x > 0,$ $\qquad x \in (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty);$

20. $x^4-13x^2+36 \le 0,$ $\qquad x \in [-3; -2] \cup [2; 3];$

21. $x^5+x^4-15x^3-5x^2+34x+24 > 0,$

$$x \in (-4; -1) \cup (-1; 2) \cup (3; +\infty);$$

22. $32x^4-48x^3-10x^2+21x+5 \le 0,$ $\qquad x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[1; \frac{5}{4}\right];$

23. $2x^3-3x^2+6x+4 < 0,$ $\qquad x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right);$

24. $x^4-3x^3-x+3 \ge 0,$ $\qquad x \in (-\infty; 1];$

25. $x^3-3x^2-x+3 \le 0,$ $\qquad x \in (-\infty; -1] \cup [1; 3].$

2.5. Метод заміни змінної при розв'язуванні раціональних нерівностей

Приклад 12. Розв'язати нерівність $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12>0.$

Розв'язання

Зробимо заміну $t=x^2+x$, тоді $t^2-8t+12>0$. Розкладемо на множники квадратний тричлен, який стоїть у лівій частині нерівності: $(t-2)(t-6)>0$ або $t \in (-\infty;\ 2) \cup (6;\ \infty)$.

Оскільки $t=x^2+x$, то дістаємо $\left[\begin{array}{l} x^2+x<2, \\ x^2+x>6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2<0, \\ x^2+x-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2)<0, \\ (x-2)(x+3)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-2;1), \\ x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty) \end{array}\right.$$

$x \in (-\infty;\ -3) \cup (-2;\ 1) \cup (2;\ \infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty;\ -3) \cup (-2;\ 1) \cup (2;\ \infty)$.

3. Дробово-раціональні нерівності

3.1. Загальні поняття

Нерівності виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \lozenge 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, $\lozenge$ — один зі знаків $>, <, \geq, \leq$, називають *дробово-раціональними*. Шляхом виконання рівносильних перстворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної.

1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \cdot Q(x) > 0;$

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \cdot Q(x) < 0;$

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$

4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

3.2. Метод інтервалів розв’язування дробово-раціональних нерівностей

При розв'язуванні раціональних нерівностей складнішого вигляду, ніж зазначено вище, необхідно спочатку алгебраїчними перетвореннями звести їх саме до простішого виду, а потім застосувати метод інтервалів з урахуванням усіх вже описаних тонкощів (п. 2.4). Таким чином, можна запропонувати наступний **алгоритм** для розв’язування раціональних нерівностей :

1. Усі доданки, дроби та інші вирази необхідно перенести до лівої частини нерівності.

2. За потреби привести дроби до спільного знаменника.

3. Розкласти чисельник та знаменник отриманого дробу на множники.

4. Розв’язати отриману нерівність методом інтервалів.

При цьому при **розв’язуванні раціональних нерівностей не допускається** :

1. Перемножувати дроби «хрест-навхрест».

2. Як і в рівняннях, не можна скорочувати множники зі змінною з обох частин нерівності. кщо такі множники є, то після перенесення всіх виразів у ліву частину нерівності їх потрібно винести за дужки, а потім врахувати ті

точки, які вони дадуть після остаточного розкладання отриманого виразу на множники.

3. Окремо розглядати чисельник та знаменник дробу.

Метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени відносно x. Нерівності $P(x) \cdot Q(x) > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ($P(x) \cdot Q(x) < 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$) рівносильні. Розглянемо випадок, коли многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ розкладаються у добутки двочленів виду $x - x_0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -3; \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тоді одержимо:

$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$; $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x(x-2)+2(x+3)-5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-2)} < 0$;

$\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} < 0$. Тоді $(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0$. Нулі множників: $x = 3$, $x = -3$, $x = 2$.

Отже, $x \in (-3; 2) \cup (2; 3)$.
Відповідь. $(-3; 2) \cup (2; 3)$.

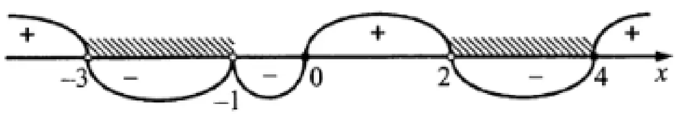
Зауваження. Розв'язки нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ та $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ є об'єднаннями розв'язків відповідних нерівностей $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ та рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Наприклад, знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$. Маємо:

$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$; $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0$; $\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0$;

$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$; $\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0; \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$

Нулі чисельника: $x = 4$, $x = 0$; нулі знаменника: $x = -3$, $x = -1$; $x = 2$.



Отже, $\left[\begin{array}{l} -3 < x < -1; \\ -1 < x \leq 0; \\ 2 < x \leq 4. \end{array}\right.$ Цілими розв'язками є –2; 0; 3; 4.

Відповідь. 4.

Завдання для самостійної роботи

Рівень А

Розв'язати нерівності:

1. $-4x \leq 48.$

2. $0{,}25x \geq -8.$

3. $2x - 4 > 5 - x.$
4. $2 - 5x \geq 14 - x.$
5. $6x < 0{,}2x - 2(x + 3).$
6. $0{,}5x - 4(x - 3) > 3x.$
7. $0 < y - 0{,}3(2 - y).$
8. $4 \geq 5z - 0{,}2(1 - z).$
9. $x + 2 < 5(2x + 8) + 13(4 - x) - 3(x - 2).$
10. $y + 7 > 4(2 - y) - 12(4 - 2y) + 17(y - 1$
11. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$
12. $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0{,}4.$
13. $2y - \frac{1}{2} < 0{,}2(y + 3).$
14. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 4.$
15. $\frac{2x + 1}{7} \geq 1.$
16. $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x}{6} \leq 5.$
17. $\frac{3 - y}{4} - \frac{y + 2}{5} \geq 2.$
18. $\frac{x - 1}{4} + \frac{x + 3}{2} > 1 - \frac{x}{6}.$
19. $\frac{2 - x}{4} + 1 < \frac{2x - 1}{10} - \frac{2x - 3}{6}.$
20. $x - \frac{3 + 2x}{2} \geq \frac{1 - x}{4}.$
21. $\frac{a - 1}{2} - \frac{2a + 3}{8} > 2 + a.$
22. $\frac{x + 2}{0{,}3} + \frac{2 - x}{0{,}4} < \frac{x + 4}{1{,}2}.$
23. $\frac{c - 3}{0{,}5} - \frac{2 - c}{1{,}5} \geq \frac{2c}{3}.$
24. $2 - \frac{x}{3} < \frac{x - 1}{4} < 1 + \frac{x}{6}.$
25. $\frac{2x - 1}{6} < \frac{x + 3}{12} < \frac{3x + 7}{18}.$

Розв'язати нерівності другого степеня:

1. $x^2 > 9.$
2. $x^2 \geq 0.$
3. $x^2 \leq 10.$
4. $x^2 < 0.$
5. $3(x - 5)^2 \leq 0.$
6. $3x^2 < 8.$
7. $(x - 1)^2 < 16.$
8. $(3x - 2)^2 \leq 0.$
9. $(6x - 5)^2 < -7.$
10. $(3x - 4)^2 \geq 13.$
11. $2x^2 + 7x + 3 \leq 0.$
12. $x^2 - x + 6 < 0.$
13. $-x^2 + 2x + 8 \leq 0.$
14. $x^2 + x > 0.$
15. $3x^2 + x - 2 \geq 0.$

Рівень Б

1. $-x^2 - x + 20 \geq 0.$
2. $0 \leq (2x + 3)^2 < 5.$
3. $0 < (6x - 7)^2 \leq 3.$
4. $0 < x^2 \leq 1.$

5. $-4 < x^2 - 4x \le 0.$

6. $-3 < 2x^2 + 7x < 0.$

7. $-9 \le x^2 < 25.$

8. $2 \le x^2 + x < 6.$

9. $-2 < 3x^2 - 4x < 0.$

10. $0 < 5x - 7x^2 \le 1.$

Розв’язати раціональні нерівності методом інтервалів:

Рівень А

1. $(x-1)(x-4) > 0.$
2. $(3x+2)(4x+3) \ge 0.$
3. $(x-2)(4-x) > 0.$
4. $(x+3)(5-x) < 0.$
5. $(7x-4)(2-9x) \ge 0.$
6. $\dfrac{x-2}{x+3} < 0.$
7. $\dfrac{2x+1}{x-4} > 0.$
8. $\dfrac{x}{x-2} < 0.$
9. $\dfrac{x+1}{2-x} > 0.$
10. $\dfrac{2x}{3-x} \le 0.$
11. $\dfrac{x}{x^2+9} \ge 0.$
12. $(x-1)(x+3)(x-4) < 0.$
13. $x(x-2)(x+2) \ge 0.$
14. $(x-5)(x+1)(6-x) > 0.$
15. $(x+4)(x+1)(1-x)(2-x) > 0.$

Рівень Б

1. $\dfrac{2x}{x+3} \ge 1.$
2. $\dfrac{2-x}{x-8} \le 1.$
3. $\dfrac{x+4}{2x-7} < 2.$
4. $(x^2-3)(x^2+3) < 0.$
5. $\dfrac{x(x-4)}{(x+8)(x-6)} \le 0.$
6. $\dfrac{(x+2)(x+4)}{(x-1)(5-x)} < 0.$
7. $\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)} \ge 0.$
8. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x} \ge 0.$
9. $\dfrac{1}{x-2} \le 6.$
10. $\dfrac{6x+7}{3x-5} < 4.$
11. $\dfrac{7x-6}{x+2} < 3.$
12. $\dfrac{2x+3}{2-x} < 5.$
13. $\dfrac{x}{x-6} > \dfrac{1}{3}.$
14. $\dfrac{6x-3}{x^2+5} < 1.$

15. $\frac{2}{x+9} < \frac{x}{x-6}.$

16. $3 + \frac{4}{x+2} > \frac{3}{x}.$

17. $1 - \frac{2}{x-3} > \frac{2}{x}.$

18. $\frac{x-3}{x} - \frac{x+3}{x-3} < 2.$

19. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \le 0.$

20. $\frac{1-6x}{2x^2-3x-2} < 2.$

21. $\frac{x-8}{x^2-5x+4} > \frac{2}{x+1}.$

22. $\frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$

23. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 < 0.$

24. $x^3 - 3x^2 + x + 1 \ge 0.$

25. $x^6 - 9x^3 + 8 > 0.$

26. $x^2(x+1)^3 > 0.$

27. $(x+4)^5(x-1)^4(x-2)^7 < 0.$

28. $x^4(x+6)^5(x-9)^3 \ge 0.$

29. $(2x-1)^3(3x+4)(x-6)^2 > 0.$

30. $(x+5)^7(x-1)^4(x+3)^2(7-x)^3 \le 0.$

31. $(6-x)^5(7+x)^2(3-x)^4(x+8)^6 \le 0.$

32. $\frac{x(x+2)^5}{(x-1)^3(x-3)^6} \le 0.$

33. $\frac{x^2(x+3)^5}{(x-1)(x-2)^4} \ge 0.$

34. $\frac{5x^2(x-2)^8(x-4)^5}{(x+2)^3} < 0.$

35. $\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)^9}{(4-x)x^3} \ge 0.$

36. $\frac{(-x^2+2x-5)^3(x+2)^4(3-x)}{(x+4)^5(x-1)^9} > 0.$

37. $\frac{(9x^2-12x+4)^5(4-3x-x^2)}{(x^2+2x-8)(x+3)^{11}} \ge 0.$

38. $\frac{x^3-x^2-x+1}{(x+8)^7} > 0.$

39. $\frac{x^4-2x^2-8}{(x^2+2x+1)^3} < 0.$

40. $\frac{x^4+2x^3-x-2}{3x^2} < 0.$

Розв’язати системи нерівностей

Рівень А

1. $\begin{cases} 2x+3 > x, \\ 4x - x < 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2-5x < 7, \\ 3x+1 < -8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8 \le 4x+8, \\ 0 > 3x+6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4-3y \ge -2y, \\ y-3 \ge 4. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{3}, \\ x - 1 < 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{z-1}{2} < \frac{z-2}{3}, \\ 2z - 3 \ge 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x \le 2 - 3(x+1), \\ 5x \ge 3 + (x-4). \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4 - \frac{x-1}{3} \ge x, \\ 7x - 1 \ge 48. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3(3+2x) - 2(18-x) < 7x, \\ 6(2+x) > 9(9+x) - 5x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 8(1+x) - 3(2x-1) > 4, \\ 5 < 3x - 2(8x-3). \end{cases}$

11. $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 4, \\ (x-1)^2 > x^2 - 4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} c^2 - 3 < (c+3)^2, \\ 2c - c^2 > (c-2)^2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} (x-1)^2 \ge x^2 + 7, \\ (x-2)^2 \ge x^2 - 8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} (z^2 - 2) \cdot 3 \ge 3z^2 - 5, \\ z^2 + 2z \le (z-1)(z+1). \end{cases}$

15. $\begin{cases} n(n+1) > (n+2)(n-2), \\ (n-3)^2 \ge 3 - n(2-n). \end{cases}$

Рівень Б

1. $\begin{cases} x^2 \ge 9, \\ 0 < 2x + 9 < 17. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{9}{x^2} \ge 1, \\ \frac{1}{x-2} \le 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0 < (x-2)^2 < 25, \\ \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1} \ge 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{4}{(x-2)^2} < 1, \\ \frac{x^2}{x^2 - 1} \ge 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 \le 0, \\ \frac{1}{x^2} > 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ x^2 \ge 5x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{1}{x^2} \ge 1, \\ \frac{1}{x+1} > 0, \\ \frac{2x - x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3} < 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 4 \le 0, \\ 1 > -\frac{1}{x}. \end{cases}$

Розв’язати нерівності методом заміни змінної:

1. $x^6 - 9x^3 + 8 < 0.$
2. $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 \le 0.$
3. $x^{10} - 7x^5 + 12 \ge 0.$
4. $\left(x^2 - 7x + 12\right)^2 - 6\left(x^2 - 7x + 13\right) + 6 \le 0.$
5. $\left(x^2 - 5x + 1\right)^2 - 8\left(x^2 - 5x - 2\right) - 17 > 0.$

3.3. Розв'язування дробово-раціональних нерівностей з параметрами

У матеріалах ЗНО [10] та НМТ наведено зразки завдань, які дають можливість узагальнити та систематизувати знання з даної теми

Розглянемо приклад: розв'язати нерівність $\frac{x-2}{ax-1} < 0$. Якщо $a = 0$, то одержимо лінійну нерівність $-(x-2) < 0$, тобто $x > 2$.

Нехай $a \ne 0$, тоді дана нерівність рівносильна нерівності $a(x-2)\left(x - \frac{1}{a}\right) < 0$. Застосуємо для розв'язування цієї нерівності метод інтервалів. Нулі множників: $x_1 = 2$ та $x_2 = \frac{1}{a}$, до того ж:

1) $x_1 = x_2 = 2$, якщо $a = 0{,}5$;

2) $x_2 < x_1$, якщо $\frac{1}{a} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - 2 < 0$; $\frac{1-2a}{a} < 0$; $2\left(a - \frac{1}{2}\right)a > 0$; $a < 0$ або $a > 0{,}5$;

3) $x_1 < x_2$, якщо $a \in (0; 0{,}5)$.

Розглянемо випадки.

1) $a = 0{,}5$. У цьому випадку нерівність набуває вигляду $(x-2)^2 < 0$, що неможливо. Отже, якщо $a = 0{,}5$, то вихідна нерівність не має розв'язків;

2.1) $a < 0$. $a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) > 0$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$;

2.2) $a \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. $a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$;

2.3) $a \in (0; 0{,}5)$. $a(x-2)\left(x - \frac{1}{a}\right) < 0$; $(x-2)\left(x - \frac{1}{a}\right) < 0$; $x \in \left(2; \frac{1}{a}\right)$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$; якщо $a = 0$, то $x \in (2; +\infty)$; якщо $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $x \in \left(2; \frac{1}{a}\right)$; якщо $a = 0{,}5$, то $x \in \varnothing$; якщо $a > 0{,}5$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$.

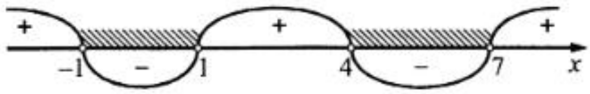
Приклад 2. Розв'язати нерівність $\dfrac{5x+7}{x-1} \le 2$.

■ $\dfrac{5x+7}{x-1} \le 2$; $\dfrac{5x+7}{x-1} - 2 \le 0$; $\dfrac{5x+7-2(x-1)}{x-1} \le 0$; $\dfrac{3x+9}{x-1} \le 0 \;\Big|:3$; $\dfrac{x+3}{x-1} \le 0$;

Отже, розв'язок нерівності — $x \in [-3; 1)$.
Відповідь. $[-3; 1)$. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7} > 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

■ $\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7} > 0$; $\dfrac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)} < 0$; $(x-1)(x-4)(x+1)(x-7) < 0$. Нулі множників: $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$, $x = 7$.



Отже, $x \in (-1; 1) \cup (4; 7)$. Цілими розв'язками є 0; 5; 6.
Відповідь. 3. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\dfrac{x}{2x+3} > \dfrac{1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup$ $\cup (3; +\infty)$	$(-1{,}5; -1) \cup$ $\cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -1{,}5] \cup$ $\cup [-1; 0] \cup$ $\cup [3; +\infty)$	$(-1{,}5; 1) \cup (0; 3)$	$(-\infty; -1{,}5) \cup$ $\cup (-1; 0) \cup$ $\cup (3; +\infty)$

■ $\dfrac{x}{2x+3} > \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{x}{2x+3} - \dfrac{1}{x} > 0$; $\dfrac{x^2-(2x+3)}{x(2x+3)} > 0$; $\dfrac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} > 0$; $\dfrac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0$;

$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0$. Нулі множників: $x = -1$, $x = 3$, $x = 0$, $x = -1{,}5$.

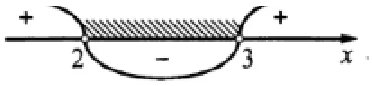
Отже, $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.
Відповідь. Д. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in R$	$(2; 3)$	$(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; -7) \cup (2; 3)$

■ Оскільки $|x| + 7 > 0$ за будь-якого значення x, то маємо: $\dfrac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$; $x^2 - 5x + 6 < 0$;

$(x-2)(x-3) < 0$.



Отже, $x \in (2;\ 3)$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2} \geq -3x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

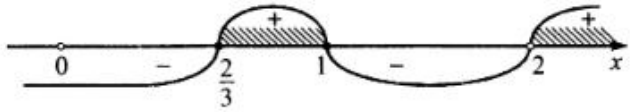
■ $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2} \geq -3x$. Знайдемо ОДЗ нерівності $x^2 - |x| - 2 \neq 0$.

1) $x \geq 0$: $x^2 - x - 2 \neq 0$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 2; \\ x \neq -1; \end{array}\right.$ $x \neq 2$;

2) $x < 0$: $x^2 + x - 2 \neq 0$; $\left[\begin{array}{l} x \neq -2; \\ x \neq 1; \end{array}\right.$ $x \neq -2$.

Отже, $x \neq \pm 2$.

1) Нехай $x \geq 0$, $x \neq 2$, тоді отримаємо: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} \geq -3x$; $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} \geq -3x$; $\dfrac{x+2}{x-2} \geq -3x$; $\dfrac{x+2}{x-2} + 3x \geq 0$; $\dfrac{x+2+3x^2-6x}{x-2} \geq 0$; $\dfrac{3x^2-5x+2}{x-2} \geq 0$; $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{x-2} \geq 0$; $(x-1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-2) \geq 0$.



Отже, $x \in \left[\dfrac{2}{3};1\right] \cup (2;+\infty)$.

2) нехай $x < 0$, $x \neq -2$, тоді отримаємо: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2} \geq -3x$; $\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)} \geq -3x$; $\dfrac{x+1}{x-1} + 3x \geq 0$; $\dfrac{x+1+3x(x-1)}{x-1} \geq 0$; $\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1} \geq 0$. Квадратний тричлен $3x^2 - 2x + 1$ має від'ємний дискримінант, перший коефіцієнт $a = 3 > 0$, тому за всіх значень x набуває тільки додатних значень, тому одержимо нерівність $x - 1 > 0$, звідки $x \in \varnothing$.

Розв'язками вихідної нерівності є $x \in \left[\dfrac{2}{3};1\right] \cup (2;+\infty)$, а найменший цілий розв'язок нерівності $x = 1$.

Відповідь. 1. ■

Розв'язками вихідної нерівності є $x \in \left[\dfrac{2}{3};1\right] \cup (2;+\infty)$, а найменший цілий розв'язок нерівності $x = 1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$.

■ $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right| < 3$; $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-3} < 3; \\ \dfrac{3x+1}{x-3} > -3. \end{cases}$ ОДЗ: $x \neq 3$. $\begin{cases} \dfrac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0; \\ \dfrac{3x+1+3x-9}{x-3} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{10}{x-3} < 0; \\ \dfrac{6x-8}{x-3} > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-3 < 0; \\ (x-3)\left(x-\dfrac{4}{3}\right) > 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x<3; \\ \left[\begin{array}{l} x>3; \\ x<\dfrac{4}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \quad x<\frac{4}{3}.$$ Отже, $x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. Тоді найбільший цілий розв'язок $x=1$.

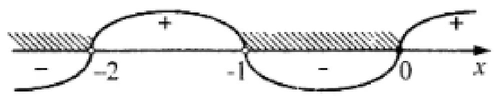
Відповідь. 1. ■

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2;-1)$	$(-2;-1)\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup$ $\cup(-1;0]$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$

■ $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq 1;$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1; \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\leq -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2}\geq 0; \\ \dfrac{x^2-3x+2+x^2+3x+2}{x^2+3x+2}\leq 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \dfrac{-6x}{x^2+3x+2}\geq 0; \\ \dfrac{2x^2+4}{x^2+3x+2}\leq 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}\leq 0; \\ \dfrac{x^2+2}{(x+1)(x+2)}\leq 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x+1)(x+2)\leq 0; \\ (x+1)(x+2)\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x+2)\leq 0; \\ (x+1)(x+2)\neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$



$x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0]$

$x\in(-2;-1)$

Отже, $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\dfrac{|x^2+4a(a-x)+4|}{|x-2a|}\leq$ $\leq 2x+3-x^2$ має хоча б один розв'язок. У відповідь записати найбільше значення параметра a.

■ Перетворимо чисельник дробу: $|x^2+4a(a-x)+4|=|x^2+4a^2-4ax+4|=|(x-2a)^2+4|=$ $=(x-2a)^2+4$.

Тепер ліва частина нерівності перетвориться так:

$h(x)=\dfrac{(x-2a)^2+4}{|x-2a|}=|x-2a|+\dfrac{4}{|x-2a|}=2\left(\dfrac{|x-2a|}{2}+\dfrac{2}{|x-2a|}\right)$. Для всіх $b>0$ виконується нерівність $b+\dfrac{1}{b}\geq 2$. Тому $\dfrac{|x-2a|}{2}+\dfrac{2}{|x-2a|}\geq 2$. Отже, $h(x)\geq 2\cdot 2=4$, звідки $\dfrac{1}{2}\left(|x-2a|+\dfrac{4}{|x-2a|}\right)\geq 2;$ $|x-2a|+\dfrac{4}{|x-2a|}\geq 4$. Права частина нерівності перетвориться так: $f(x)=-x^2+2x+3=-(x^2-2x-3)=$ $=-(x^2-2x+1)+4=-(x-1)^2+4$, тому $-(x-1)^2+4\leq 4$. Маємо: $h(x)\geq 4$, $f(x)\leq 4$. Задана нерівність виконується лише тоді, коли $h(x)=f(x)=4$. З умови $f(x)=4$ випливає, що $x=1$. Тоді умову $h(x)=4$ можна записати так: $2\cdot\left(\dfrac{|1-2a|}{2}+\dfrac{2}{|1-2a|}\right)=4$. Нехай $|1-2a|=t$. Тоді $t+\dfrac{4}{t}=4;$ $t^2-4t+4=0;$ $(t-2)^2=0;$

$t = 2$, тобто $|1 - 2a| = 2$; $\left[\begin{array}{l} 1-2a=2; \\ 1-2a=-2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=-0,5; \\ a=1,5. \end{array}\right.$ Найбільше значення $a = 1,5$.

Відповідь. 1,5. ■

Зразки матеріалів ЗНО з математики попередніх років

11.13. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{4x^2-4x+1}{(x+4)(x-3)} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4)\cup(3; +\infty)$	$(-4; 3)$	$\left(-4; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -4)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup$ $\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -4]\cup[3; +\infty)$

11.14. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-4; 3)$	$(-4; 2)\cup(2; 3]$	$(-\infty; -4)\cup\{2\}\cup$ $\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -4)\cup(3; +\infty)$	$(-3; 4)$

11.15. Обчислити найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 - x^2}{x+9} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
–9	–8	0	9	1

11.16. Розв'язати нерівність $\frac{(x-1)^2(x+7)(x+3)^3}{x^2+6x+9} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-7; -3)\cup[1; +\infty)$	$(-\infty; -7]\cup(-3; +\infty)$	$[-7; -3)$	$(-\infty; 3)\cup[7; +\infty)$	$(3; 7]$

11.19. Знайти множину розв'язків нерівності $\left|\frac{1}{x-5}\right| > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(4; 5)\cup(5; 6)$	$(4; 6)$	$(-\infty; 4)\cup(6; +\infty)$	$(-6; -4)$	$(-\infty; -6)\cup(-4; +\infty)$

11.20. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{7}{|x|+5} < 1$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-2; 2)$	$(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$	$(-\infty; -5)\cup(2; +\infty)$	$(-5; 2)$

11.21. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{(x+2)(x-a)}{x-4} \leq 0$, якщо $-2 < a < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-2; a]$	$[a; 4)$	$[-2; a]\cup(4; +\infty)$	$(-\infty; -2]\cup[a; 4)$	$[a; 4]$

4. Системи раціональних нерівностей

4.1. Системи нерівностей з однією змінною

Розв'язати систему нерівностей із однією змінною — означає знайти множину всіх таких значень змінної, які задовольняють одночасно всі нерівності системи.

При розв'язуванні систем раціональних нерівностей потрібно по черзі розв’язати всі нерівності, що входять до системи. Система вимагає виконання двох і більше умов, причому ми шукаємо значення невідомої величини, які задовольняють відразу всім умовам. Тому, у відповіді системи нерівностей слід зазначити загальні частини всіх розв’язків окремих нерівностей (або загальні частини всіх заштрихованих проміжків, що зображують відповіді кожної окремої нерівності).

За Є.П. Істером [8] для розв’язування систем нерівностей з однією змінною використовують **Метод рівносильних перетворень.**

Щоб *розв’язати систему нерівностей з однією змінною*, слід дотримуватися такого алгоритму:

1) розв’язати кожну з нерівностей системи;
2) зобразити множину розв’язків кожної з нерівностей на координатній прямій;
3) знайти переріз цих множин, який і буде множиною розв’язків системи;
4) записати відповідь.

Приклад 1. Розв’язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2(x-5) < 4x+1, \\ 3(x+2)-(x-1) > 5. \end{cases}$$

Розв’язання. Поступово замінюючи кожну з нерівностей системи їй рівносильною, більш простою, матимемо:

$$\begin{cases} 2x-10 < 4x+1, \\ 3x+6-x+1 > 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-4x < 10+1, \\ 3x-x > 5-6-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x < 11, \\ 2x > -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5{,}5, \\ x > -1 \end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність $x > -5{,}5$ і множину чисел, які задовольняють нерівність $x > -1$ (рис. 4.1).

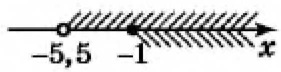


Рис. 4.1

Множиною розв’язків системи є переріз (спільна частина) цих множин, тобто проміжок [-1;+∞).

Відповідь. [1; +∞).

Як та інших темах з математики, під час розв’язування нерівностей та їх систем можна використовувати **спосіб заміни змінної**. Головне не забувати, що після введення заміни, новий вираз має стати простішим і не містити старої змінної. Крім того, потрібно не забувати виконувати зворотну заміну.

Іноді при розв'язуванні рівнянь, нерівностей або їх систем доводиться переходити не тільки до *рівносильних* систем рівнянь чи нерівностей, а й до *сукупностей* рівнянь чи нерівностей або їх систем. При розв'язуванні сукупностей раціональних нерівностей також по черзі вирішують кожну з нерівностей. **Сукупність** вимагає знаходження всіх значень змінної, що задовольняють хоча б одній із умов. Тобто будь-якій з умов, кільком умовам або всім умовам разом. У відповіді сукупності нерівностей вказують усі частини всіх розв'язків окремих нерівностей (або всі частини всіх заштрихованих проміжків, що зображують відповіді кожної окремої нерівності).

Отже, **розв’язати сукупність** рівнянь (нерівностей) чи їх систем – значить знайти такі значення змінної або такі набори значень змінних (якщо змінних декілька), кожне з яких є розв’язком хоча б одного з рівнянь (нерівностей), що входять до сукупності, і при цьому решта рівнянь (нерівностей) визначена, або довести, що таких наборів чисел не існує.

З цього означення випливає, що *областю допустимих значень* (ОДЗ) сукупності є *загальна* область визначення для всіх функцій, які входять до запису сукупності.

Як і для рівнянь, нерівностей або їх систем дві сукупності рівнянь (нерівностей або їх систем) називають **рівносильними** на деякій множині, якщо вони на цій множині мають однакові розв’язки, тобто кожний розв’язок першої нерівності є розв’язком другої і, навпаки, кожний розв’язок другої нерівності є розв’язком першої.

4.2. Системи нерівностей з двома змінними

4.2.1. Рівняння з двома змінними

Розв'язком рівняння з двома змінними $f(x; y)=0$ називають будь-яку пару чисел $(x; y)$, яка перетворює рівняння на правильну числову рівність.

Рівняння з двома змінними зазвичай має *нескінченну кількість розв'язків.*

Приклад 1: рівняння $x^2+y^2=16$ задовольняє будь-яка пара $(x; y)$ — така, що точка координатної площини $M(x; y)$ належить колу з радіусом 4 та центром у початку координат.

Якщо дано ціле раціональне рівняння з декількома змінними й цілочисельними коефіцієнтами і якщо поставлено завдання знайти його цілочисельні (або раціональні) розв'язки, то говорять, що задано *діофантове* рівняння.

Приклад 2: Знайди цілочисельні розв'язки рівняння $3x+4y=19$.
Розв'язання. Виразимо x із даного рівняння: $x=(19-4y)/3$.

При подільності числа у на 3 може бути три можливості:

1) $y=3k$;
2) $y=3k+1$;
3) $y=3k+2$.

Якщо $y=3k$, то отримаємо $19-4y=19-4\cdot3k=19-12k$. Це число на 3 не ділиться, оскільки, за ознакою подільності суми, $12k$ ділиться на 3, а 19 — не ділиться.

Якщо $y=3k+1$, то отримаємо
$19-4y=19-4\cdot(3k+1)=19-12k-4=15-12k=3\cdot(5-4k)$. Це число на 3 ділиться.

Якщо $y=3k+2$, то отримаємо $19-4y=19-4\cdot(3k+2)=19-12k-8=11-12k$. Це число на 3 не ділиться.

Отже, єдина можливість цілочисельного розв'язку рівняння — це пара чисел $(5-4k; 3k+1)$, де k — будь-яке ціле число.

Відомо, що *лінійне рівняння з двома змінними* має нескінченно багато впорядкованих пар розв'язків, які утворюють лінію при графічному їх розв'язуванні.

Наприклад, геометричним тлумаченням розв'язків лінійного рівняння з двома змінними $y=(3/2)x+3$ є пряма (рис. 4.2):

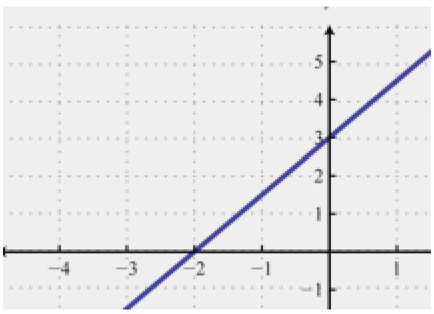


Рис. 4.2

4.2.2. Нерівності з двома змінними

Розв'язком нерівності $f(x;y)>0$ називають будь-яку пару чисел $(x; y)$, яка задовольняє цю нерівність, тобто перетворює її на правильну числову нерівність.

Приклад 3: Розв'язати нерівність: *2x+3y>0*. [17]

Розв'язання. Побудуємо графік рівняння *2x+3y=0* — пряму.

Розв'язком нерівності є точки напівплощини вище або нижче від побудованої прямої. Для правильного визначення потрібної напівплощини *виберемо будь-яку точку з якої небудь напівплощини, координати якої підставимо в даку нерівність*.

Якщо нерівність буде правильною, то напівплощина вибрана правильно.

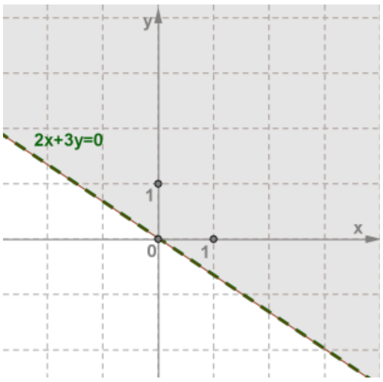


Рис. 4.3

Вибравши контрольну точку (1;1) із верхньої напівплощини, отримаємо правильну числову нерівність: 2·1+3·1>0.

Отже, розв'язком даної нерівності є верхня напівплощина (рис. 3.4.2).

Лінійна нерівність з двома змінними має набір розв'язків, що складається з області, яка визначає *половину площини*.

Приклад 4. Нерівність y≤(3/2)x+3 задає заштриховану півплощину (рис. 4.4):

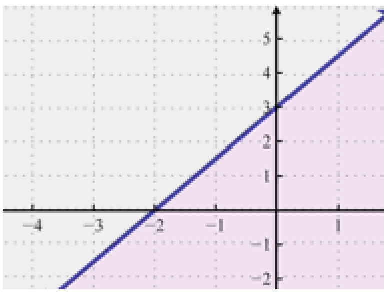


Рис. 4.4

Для нерівності лінія визначає межу області, яка заштриховується. Це вказує на те, що будь-яка впорядкована пара в заштрихованій області, включаючи лінію межі, задовольнить нерівність. Щоб побачити, що це так, можна зробити перевірку. Для цього виберіть кілька контрольних точок і підставляйте їх у нерівність.

Графік розв'язку лінійної нерівності завжди є *областю*. Однак межа не завжди може бути включена в цей набір. У попередньому прикладі пряма була частиною набору розв'язків через «або дорівнює» частини даної нерівності смислу ≤. Якщо задано строгу нерівність <, ми використаємо пунктирну лінію, щоб вказати, що ці точки не включені до набору розв'язків.

Тому для нерівності *y<(3/2)x+3* область розв’язків буде наступною (рис. 4.5):

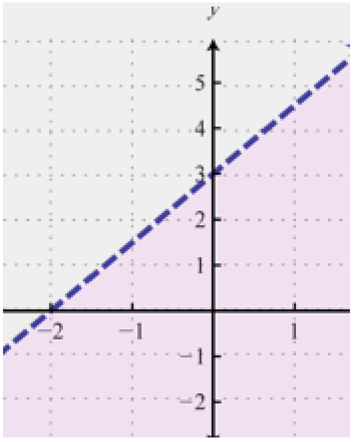


Рис. 4.5

Якщо розглянути точку(0; 3) або (-2; 0) на межі; ці впорядковані пари задовольняють лінійному рівнянню. Саме «або дорівнює» є частиною нерівності, яка робить впорядковану пару частиною множини розв'язків.

Аналогічне геометричне тлумачення розв’язків нерівностей смислу «більше ніж» (вище) > або ≥ (рис. 4.6).

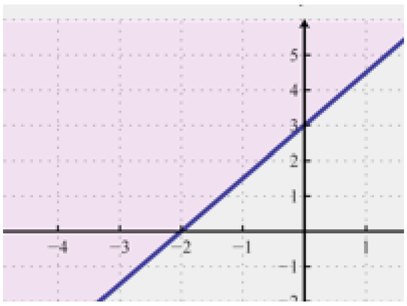


Рис. 4.6. Розв’язок нерівності *y≥ (3/2)x+3*

Для контролю підставимо координати точки (0; 0), матимемо неправильну нерівність 0≥3, тобто ця точка і всі інші точки з цієї ж півплощини *не є* розв’язками даної нерівності, а, отже, розв’язками будуть точки з іншої - верхньої (вищої) частини півплощини.

Такий спосіб дає можливість розв’язати завдання наступного типу:

Приклад 5. Визначте, чи є пара (3; 15) розв’язком нерівності

а) *2x+3y>0;* б) *5x-0,5y<0.*

Розв’язання. а) Підставимо замість *x*= 3, замість *y*= 15 і перевіримо справедливість нерівності: 2*3+3*15=6+45=51>0. Отримали правильне твердження, тому пара (3; 15) – розв’язок нерівності *2x+3y>0.*

б) Аналогічно: 5*3-0,5*15=15-7,5=7,5>0, що суперечить умові. Тому пара (3; 15) не розв’язком нерівності *5x-0,5y<0.*

Висновок. Розв'язки лінійних нерівностей - це заштрихована напівплощина, обмежена суцільною лінією або пунктирною лінією. Ця межа або включається в розв'язок, або ні, залежно від заданої нерівності. Якщо нам дано строгу нерівність, ми використовуємо пунктирну лінію, щоб вказати, що межа не включена. Якщо нам дано нестрогу нерівність, ми використовуємо суцільну лінію, щоб вказати, що вона включена.

Алгоритм розв'язання лінійних нерівностей

- Лінійні нерівності з двома змінними мають нескінченно багато впорядкованих пар розв'язків, які можуть бути побудовані шляхом заштриховування у відповідній половині прямокутної координатної площини.
- Для графіку множини розв'язку нерівності з двома змінними спочатку будують межу півплощини пунктирною або суцільною лінією залежно від нерівності. Якщо задано строгу нерівність, використовуйте пунктирну лінію для кордону. Якщо задано нестрогу нерівність, використовуйте суцільну лінію. Далі вибираємо контрольну точку не на кордоні. Якщо контрольна точка вирішує нерівність, то заштрихуйте область, яка її містить; інакше заштрихуйте протилежну сторону.
- Перевірте свою відповідь, перевіривши точки в і з області заштрихування, щоб переконатися, що вони розв'язують нерівність чи ні.

Вищенаведені ідеї та методи поширюються на *нелінійні нерівності з двома змінними.* Наприклад, всі розв'язки квадратичної нерівності $y>x^2$ будуть у заштрихованій частині площини на графіку рис. 4.7.

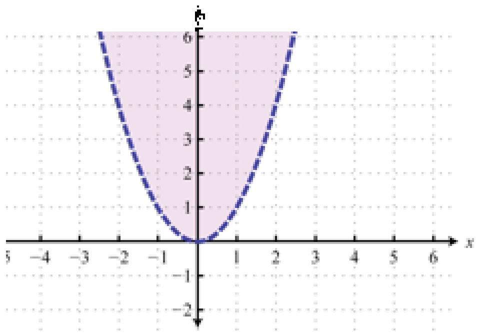


Рис. 4.7

Межа області є параболою, показаною у вигляді пунктирної кривої на графіку, і не є частиною множини розв'язків. Однак з графіка ми отримуємо, що впорядкована пара $(-1;4)$ буде розв'язком. Крім того, ми бачимо, що впорядковані пари, які не знаходяться в заштрихованій області, наприклад $(-3,2)$, не задовольняють нерівність.

Приклад 6. Для нерівності $y \le (x-1)2-2$ розв'язок надано на рис. 4.8.

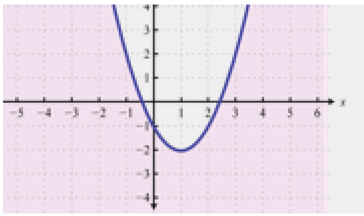


Рис. 4.8

4.3. Система нерівностей з двома змінними

Аналогічно можна міркувати при розв'язанні системи нерівностей із двома змінними.

Розв'язати систему нерівностей із двома змінними — означає знайти множину точок координатної площини (всіх значень пари змінних (*x, y*)), координати яких задовольняють одночасно всі нерівності системи.

За аналогією з системою нерівностей з однією змінною (п. 4.1), маємо алгоритм розв’язуванням *системи нерівностей з двома змінними* з тією особливістю, що розв’язок кожної нерівності системи зображуємо на координатній площині, тоді розв’язком системи нерівностей буде переріз (перетин) цих множин.

Приклад 7. Розв’язати графічно систему нерівностей

$$\begin{cases} y \geqslant 3 - x, \\ y - 2x < 0, \\ 2y - x < 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Розв’язуємо одну з нерівностей системи, тобто відзначаємо на координатній площині область (півплощину), координати точок якої задовольняють дану нерівність. Цю півплощину відзначаємо маленькою штриховкою, а пряму, яка є межею – суцільною (для нестрогої нерівності) або штриховою (для строгої нерівності) прямою. Аналогічно розв’язуємо всі інші нерівності системи. Загальним розв’язком системи нерівностей вважається перетин (переріз, спільна частина) всіх відзначених областей – розв’язків окремих нерівностей системи. Шуканим розвязком системи нерівностей буде заштрихований кут BDD_1 разом з променем DB (рис. 4.9).

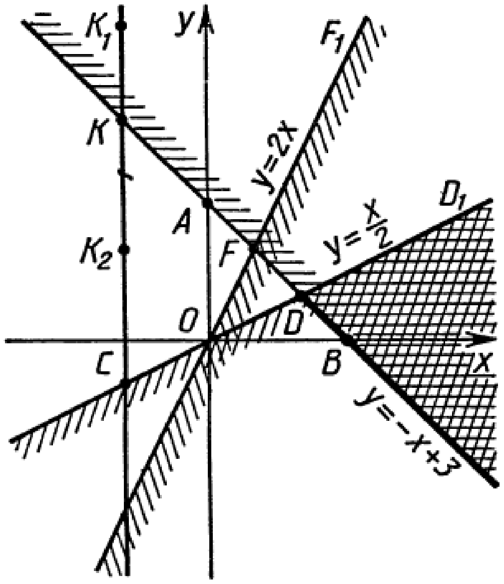


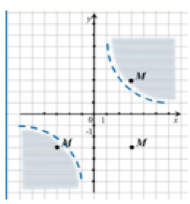
Рис. 4.9

Питання для самоконтролю

1. Які методи використовують для розв’язування нерівностей?
2. Які методи використовують для розв’язування систем нерівностей?
3. Сформулюйте алгоритм розв’язування нерівностей методом інтервалів.
4. Як розв’язати нерівність |/(x)| > a і як |/(x)| < a, де a - число?
5. Як розв’язати нерівність, що містить кілька модулів?

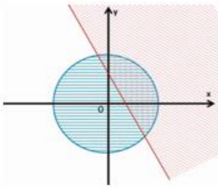
Пройти тести [15]

Яка із даних нерівностей відповідає графіку?



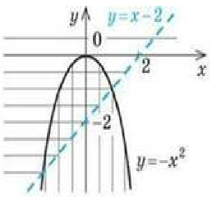
- $xy > 6$
- $xy < 6$
- $y < \frac{6}{x}$
- $x - y > 6$

Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку



- $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ x + y \ge 2. \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9, \\ x + y \le 2. \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ x - y \ge 2. \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9, \\ x - y \le 2. \end{cases}$

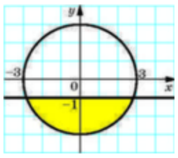
Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку



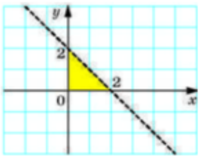
- $\begin{cases} x - y > 2, \\ x^2 + y > 0. \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y < 2, \\ x^2 + y < 0. \end{cases}$
- $\begin{cases} x - y > 2, \\ y > -x^2. \end{cases}$
- $\begin{cases} y < x - 2, \\ y > -x^2. \end{cases}$

Установити відповідність між системою нерівностей і її розв'язком:

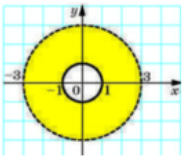
1



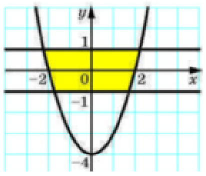
2



3



4



А $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ x^2 + y^2 \ge 1. \end{cases}$

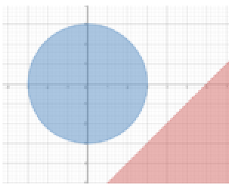
Б $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \le -1. \end{cases}$

В $\begin{cases} y \ge 0, \\ x \ge 0, \\ x + y \le 2. \end{cases}$

Г $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 9. \\ x^2 + y^2 \ge 1. \end{cases}$

Д $\begin{cases} y - x^2 > -4, \\ y - 1 \le 0, \\ y + 1 \ge 0. \end{cases}$

Якщо розв'язок системи нерівностей з двома змінними має такий вигляд, то



- Система має безліч розв'язків
- Розв'язком системи є об'єднання даних розв'язків
- Система не має розв'язків
- Розв'язком системи є незафарбована частина площини

Контрольна робота № 3

1. Розв’язати нерівність $(x-2)(x-8)+12 \ge (2x+5)^2 - 6(x+4)$.
2. Розв’язати нерівність вищого степеня

$x^2(x-4)(x-1)^4(x+0{,}5)^3(x-\sqrt{2})(x+5)^2 \le 0$.

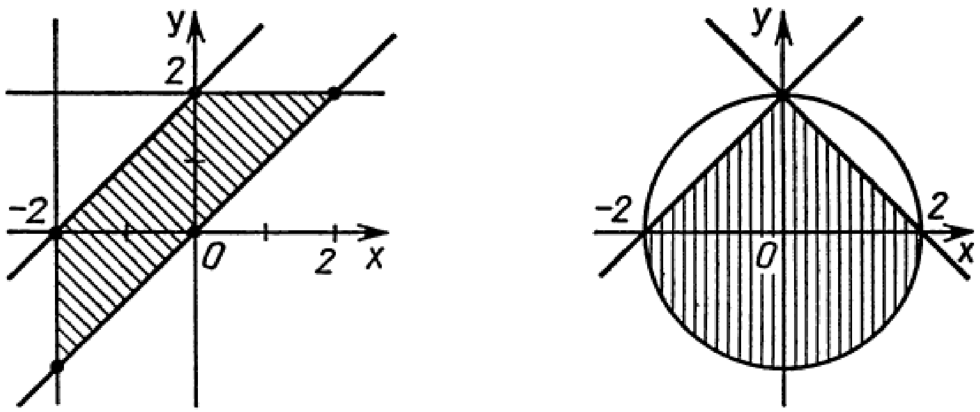
3. Розв’язати раціональну нерівність $\dfrac{x^2-5x+6}{1-x}>-2$.

4. Розв’язати систему нерівностей з однією змінною $\begin{cases}1-x^2\geq 0,\\ \dfrac{x-1}{2-x}+\dfrac{1}{2}\geq 0.\end{cases}$

5. Розв’язати системи нерівностей з двома змінними:

а) $\begin{cases}y<x^2+2\\ x+y\leqslant 3.\end{cases}$ б) $\begin{cases}xy\leqslant 2,\\ x^2+y^2<9,\\ x^2-y^2>0.\end{cases}$

6. Скласти систему нерівностей, якій задовольняють координати точок позначеної на рис. 4.10 (а, б) .



а б

рис. 4.10

Список використаних та рекомендованих джерел

1. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Елементарна математика для студентів, слухачів ПО, абітурієнтів. Навч. посіб. К.: КНЕУ, 2006. 472 с.
2. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики: Навч. посібник. Київ: ТВіМС, 2000. 320 с.
3. Житарюк І.В. Елементарна математика і методика викладання математики. Конспект лекцій. Ч. 1: Вибрані питання елементарної математики: Навч. посібник. Чернівці: Видавництво «Прут», 2014. 404 с.
4. Житарюк І.В. Елементарна математика і методика викладання математики. Конспект лекцій. Ч. 2: Загальні питання методики навчання математики: Навч. посібник. Чернівці : Видавництво «Прут», 2011. 364 с.
5. Житарюк І.В., Петришин Р. І., Житарюк С.І. Довідник з математики для вступників до ВНЗ ІІІ-ІV рівнів акредитації. Чернівці: Прут, 2005. 776 с.
6. Захарійченко Ю. О. Повний курс математики в тестах: У 2 ч. Ч. 1: Різнорівневі завдання / Ю.О. Захарійченко, О.В. Школьний, Л.І. Захарійченко,

О.В. Школьна. 10-те вид. Харків: Вид-во «Ранок», 2020. 496 с. (Серія «Енциклопедія тестових завдань»).

7. Збірник задач з математики для вступників до вузів / За ред. М.І. Сканаві; Пер. з рос.: В.М. Бондарчук, Ю.Ю. Костриця, Л.П. Оніщенко. – 3-є вид., стереотип. Київ: Вища школа, 1996. 445 с.

8. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11 -го кл. закл. заг. серед. освіти / О. Істер, О. Єргіна. Київ: Генеза, 2019. 416 с.

9. Математика.Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА / Уклад. А.М. Капіносов. Тернопіль: Підручники і посібники, 2019. 470 с.

10. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. Для 11 кл. закл. серед. осв./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. Х.: Гімназія, 2019. 352 с.

11. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас підруч. для загальгоосвіт. навч. закл: академ. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. Х.: Гімназія, 2011. 448 с.

12. Основи елементарної математики: Навч. посіб. для самостійного опрацювання / О.П. Мельниченко, Р.Л. Шевченко, І.Л. Якименко, В.Т. Розумнюк. Біла Церква, 2005. 45 с.

Інформаційні ресурси

13. «Математика: Арифметика, рівняння та нерівності» (EdEra https://courses.edera. com/courses/EdEra/m102/M102/about)

14. «Математика:Просто» https://courses.ed-era.com/courses/course-v1:EDERAOSVITORIA+Math101+2019/about

15. https://vseosvita.ua/test/systemy-nerivnostei-z-dvoma-zminnymy-466597.html Системи нерівностей з двома невідомими

16. База шкільних підручників онлайн. URL: https://gdz4you.com/pidruchnyky/

17. Графічне розв’язування нерівностей https://ukrayinska.libretexts.org/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0/%D0%9A%D0%BD%D0%B8%D0%B3%D0%B0%3A_%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D1%88%D0%B8%D1%80%D0%B5%D0%BD%D0%B0_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0/02%3A_%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D1%87%D0%BD%D1%96_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97_%D1%82%D0%B0_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96/207%3A_%D0%A0%D0%BE%D0%B7%D0%B2'%D1%8F%D0%B7%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9_%D0%B7_%D0%B4%D0%B2%D0%BE%D0%BC%D0%B0_%D0%B7%D0%BC%D1%96%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BC%D0%B8

18. Електронний курс «Елементарна математика і методика викладання математики», розміщений в університетській мережі. URL: www.e-learning.chnu.edu.ua

19. Журнал «Математика в школах України». URL: ttp://journal.osnova.com.ua/journal

20. Сайт «Уроки математики». URL: http://www.go2math.com

21. Фізико-математична бібліотека. URL: http://ftp.kinetics.nsc.ru/chichinin/pmlic.htm