

# МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

## Зміст

ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ.....	2
Список джерел .....	7

## ПРО МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Геометрія — це не просто наука про форми та розміри. Це мова, яка дозволяє нам розуміти та описувати світ навколо нас. Від архітектури та дизайну до астрономії, медицини та військової справи геометричні концепції відіграють ключову роль у багатьох галузях науки та мистецтва.

Через геометричні завдання ми вчимося аналізувати простір, розвиваємо логічне мислення та поглиблюємо розуміння математичних закономірностей. А сучасні інструменти та ресурси роблять процес вирішення цих завдань ще більш цікавим та доступним.

Геометрія – це наука і навчальний предмет/навчальна компонента не тільки про фігури та лінії; це наука, у якій глибоко опрацьовані методи дозволяють вирішувати різноманітні завдання. Залежно від специфіки завдання та бажаного результату існує кілька основних методів розв'язування геометричних задач і проблем.

Традиційно основними методами розв'язування геометричних задач (крім задач на побудову) є: геометричний, алгебраїчний та комбінований.

**Геометричний** метод найчастіше використовується при розв'язуванні задач на доведення. Потрібне твердження при цьому виводиться з низки відомих теорем за допомогою логічних міркувань. При цьому в багатьох випадках приходиться встановлювати рівність двох відрізків (або кутів).

Для доведення *рівності двох відрізків* використовують наступні дії:

- Розглядають ці відрізки, як сторони двох трикутників і доводять, що трикутники рівні, а розглядувані відрізки є в них відповідними сторонами.
- Розглядають ці відрізки, як сторони одного трикутника і доводять, що трикутник рівнобедрений, а розглядувані відрізки є його бічними сторонами.
- Замінюють відрізок  $a$  рівним йому відрізком  $a'$ , відрізок  $b$  – рівним йому відрізком  $b'$  і доводять рівність відрізків  $a'$  та  $b'$ .

Під час розв'язування геометричних задач зазвичай доводиться виконувати різноманітні *додаткові побудови*:

- проведення прямої, що паралельна або перпендикулярна до однієї з даних на рисунку;
- подвоєння медіани трикутника з подальшою побудовою трикутника до паралелограма;
- проведення допоміжного кола;

- проведення радіусів у точку дотику двох кіл або кола і прямої (відрізка) тощо.

До геометричного методу відносять і метод *геометричних перетворень* – осьова та центральна симетрія, паралельне перенесення, поворот, гомотетія.

*Алгебраїчний* метод полягає в тому, що шукана величина знаходиться за допомогою рівняння або системи рівнянь, які складаються за умовою задачі. При цьому використовують різноманітні геометричні відомості, формули, теореми: рівність відповідних елементів рівних фігур, пропорційність відповідних елементів у подібних фігурах, співвідношення елементів у прямокутному трикутнику, теорему Піфагора та інші. Алгебраїчний метод називають ще *аналітичним*.

До алгебраїчного методу розв'язування геометричних задач відносять і *метод опорного елемента*. Його використовують для складання рівняння, коли якусь величину визначають двома різними способами. Таку величину називають *опорним елементом*. В якості опорного елемента може бути довжина або квадрат довжини відрізка, або сума довжин відрізків, об'єм або площа фігури. В останньому випадку кажуть, що застосовується *метод площ*.

Якщо для складання рівняння вибрано векторний, координатний шляхи, то кажуть про застосування відповідно *векторного, координатного* або *векторно-координатного* методів. За опорний елемент тоді можна взяти довжину вектора, його розклад за неколінеарними векторами, відстань між двома точками.

Якщо за умовою задачі розглядувана фігура задана з точністю до подібності, то для складання рівняння іноді доцільно ввести *допоміжний параметр*. В якості допоміжного параметра найчастіше беруть довжину якого небудь відрізка, або довжину вектора, або відстань між двома точками, або кута. Після введення допоміжного параметра знаходять його значення двома незалежними способами, а отже отримують рівняння.

Бувають випадки, коли при розв'язуванні деяких задач спочатку замість шуканої величини потрібно знайти якусь іншу величину – її називають *допоміжною невідомою*. Нею можуть бути довжина якого небудь відрізка, величина якогось кута тощо. Допоміжна невідома величина може бути введена і при складанні системи рівнянь.

При складанні рівнянь, крім вищеназваних варіантів, можна використовувати властивості елементів і залежності між ними в геометричних фігурах.

До алгебраїчного методу відноситься також *метод прямого підрахунку* або *поетапно-обчислювальний метод*, суть якого зводиться до поетапного знаходження спочатку деяких проміжних, допоміжних величин, а потім, за їхньою допомогою, - і основних. Для цього можуть бути використані різні геометричні фігури, формули, теореми з різних розділів геометрії, векторної алгебри, координатний метод тощо.

Зрозуміло, що при розв'язуванні геометричних задач іноді недостатньо одного з цих методів у «чистому» вигляді. На кожному етапі розв'язання методи розв'язування можуть змінюватися залежно від оптимальності. Тоді говорять, що задача розв'язана **комбінованим** методом.

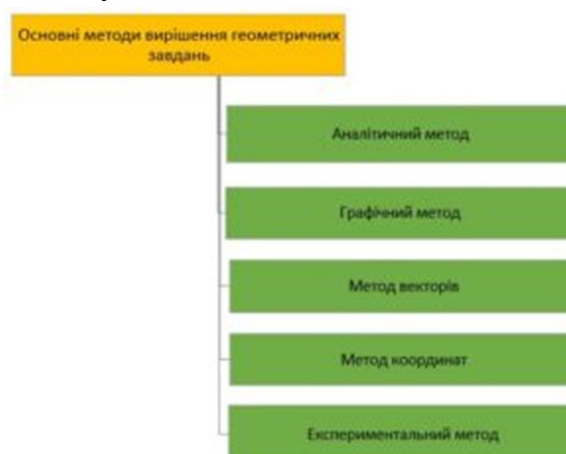
Важливо відзначити, що при розв'язуванні геометричних задач використовуються такі загальні математичні методи, як аналітичний, синтетичний, метод від супротивного тощо.

Також застосування того чи іншого методу залежить від виду геометричних задач (на обчислення, доведення, дослідження чи на побудову), де можуть застосовуватися поряд із вищеназваними деякі особливі або вибрані методи і прийоми.

Отже, кожен метод має свої сильні та слабкі сторони, і вибір методу залежить від конкретної задачі та переваг дослідника / здобувача освіти.

Сучасні тенденції у розвитку математики та інших наук на прикладі геометрії показують, як створення обчислювальної техніки / ЕОМ привело до виникнення науки кібернетики, винаходу ПК / ІКТ / ШІ змінило обличчя цієї давньої науки.

Автори [27] виділили такі основні методи розв'язування геометричних задач і дали їм наступні тлумачення:



- **Аналітичний метод:** Цей метод заснований на використанні алгебраїчних виразів для опису геометричних властивостей і відношень. Аналітичний метод ідеальний для завдань, де потрібні точні та логічні міркування.

- **Графічний метод:** Для візуальних мислителів та тих, хто воліє “бачити” розв’язок. Тут геометричні фігури та об’єкти рисуються та аналізуються вручну або за допомогою програмного забезпечення. Цей метод дозволяє швидко оцінити та інтерпретувати геометричні зв’язки.

- **Метод координат:** Введення системи координат дозволяє перетворити геометричні завдання на алгебраїчні. Хочете визначити розташування точки чи виразити пряму через рівняння? Цей спосіб для вас.

- **Метод векторів:** Вектори – це направлені відрізки, які допомагають виразити рух, силу чи будь-яку іншу векторну величину. Використовуючи їх властивості та операції, можна розв’язувати різноманітні геометричні завдання, пов’язані з напрямками та величинами.

- **Експериментальний метод:** Підхід “спробувати і побачити” може бути напрочуд ефективним, особливо коли стандартні методи не працюють. Цей метод включає створення фізичних або комп’ютерних моделей для експериментування і спостереження.

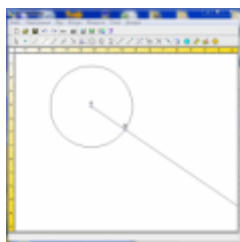
Завдяки розвитку ІКТ математичні й зокрема геометричні задачі можна розв’язувати за допомогою різноманітних прикладних програм, прикладних програмних засобів засобів (ППЗ) тощо. Існують прикладні програмні засоби Gran-2D, Gran-3D

В епоху цифрових технологій ручка та папір, безумовно, залишаються незамінними інструментами для багатьох математиків. Однак існує безліч сучасних інструментів та онлайн-ресурсів, які можуть значно спростити та прискорити процес розв’язування геометричних завдань.

1. GeoGebra – це безкоштовне програмне забезпечення для математики, що поєднує геометрію, алгебру та аналіз в одному пакеті. Використовуйте його для створення інтерактивних графіків, дослідження геометричних фігур та аналізу функцій. Програма GeoGebra — жива, динамічна геометрія, що надає можливість створення динамічних («живих») креслень для використання на різних рівнях навчання геометрії, алгебри, планіметрії та інших суміжних дисциплін. Програма володіє багатими можливостями роботи з функціями (побудова графіків, обчислення коренів, екстремумів, інтегралів і т. д. Детальніше тут: <https://artemenko.webnode.com.ua/products/geogebra/>

2. Desmos Graphing Calculator – цей безкоштовний онлайн-калькулятор дозволяє малювати графіки, досліджувати функції та проводити аналіз даних. Ідеально підходить для візуалізації та аналізу геометричних завдань.

3. [DG – пакет динамічної геометрії](#)



DG – пакет динамічної геометрії, створений авторським колективом співробітників ХДПУ ім. Г.С. Сковороди для комп'ютерної підтримки шкільного курсу планіметрії. Пакет забезпечує підтримку конструктивного напрямку в навчанні та принципу.

Детальніше тут: <https://artemenko.webnode.com.ua/prikladne-programne-zabezpechennya/>

3. Wolfram Alpha - комплексний обчислювальний двигун, який може допомогти у вирішенні широкого спектра математичних завдань, включаючи геометрію. Вводьте свої геометричні завдання та отримуйте детальні рішення крок за кроком.

4. Сайти з освітніми матеріалами – ресурси на кшталт Khan Academy, Coursera або Udeму пропонують курси з геометрії з покроковими інструкціями та відеоуроками. Підходять для тих, хто хоче глибше вивчити геометрію чи потребує додаткових ресурсів для практики.

5. 3D-моделювання – програми типу SketchUp або Tinkercad дозволяють створювати 3D-моделі геометричних об'єктів. Прекрасний спосіб візуалізувати та аналізувати просторові геометричні завдання.

6. Програма GRAN-2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині, звідки і походить її назва (GGraphic Analysis 2-Dimension). Програма функціонує під управлінням операційної системи Windows. Детальніше тут: <https://artemenko.webnode.com.ua/products/gran-2d/>

7. Програма GRAN-3D призначена для графічного аналізу просторових (тривимірних) об'єктів, звідки і походить її назва (GGraphic Analysis 3-Dimension). Програма функціонує під управлінням операційної системи Windows. Детальніше тут: <https://artemenko.webnode.com.ua/products/gran-3d/>

Сучасні технології надають нам безліч інструментів для вивчення та практики геометрії. Виберіть той, який найкраще підходить вашим потребам, і пориньте у захоплюючий світ геометричних роздумів.

## Список джерел

### Основний

1. Апостолов Г.В. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосв. навч. закл. / Г.В. Апостола. К.: Генеза, 2015. 126 с.
2. Бевз Г.П. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосв. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. К.: Видавництво «Відродження», 2015. 192 с.
3. Бурда М.І. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосв. навч. закл. М.І.Бурда, Н.А. Тарасенкова. К.: УОВЦ «Оріон», 2016. 224 с.
4. Геометрія: 11 кл.: підруч. для загальноосв. навч. закл.: академ. рівень, профіл. рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владімірова. К.: Генеза, 2011. 310 с.
5. Грудкіна Н.С. Додаткові розділи елементарної математики: Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи / Н.С. Грудкіна. – Краматорськ : ДДМА, 2021. 64 с.
6. Захарійченко Ю.О. Повний курс математики в тестах : У 2 ч. Ч. 1 : Різномірівневі завдання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. 10-те вид. Харків : Вид-во «Ранок», 2020. 496 с. (Серія «Енциклопедія тестових завдань»). Істер О.С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосв. навч. закл. / О.С. Істер. К.: Генеза, 2017. 240 с.
7. Істер О.С. Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед, освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. Київ: Генеза, 2018. — 368 с.
8. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії : кн. для вчителя. К. : Абрис, 1994. 464 с.
9. Лов'янова І. В. Вибрані методи і прийоми розв'язування геометричних задач (матеріали для факультативних занять та курсів за вибором). 11 клас / І. В. Лов'янова; за заг. ред. проф. Н. А. Тарасенкової. – Черкаси: видавець Чабаненко Ю. А. – 2014. – 68 с.
10. Лоповок Л.М. Збірник задач з геометрії для 6-8 класів. К.: Рад. Школа, 1983. 96 с.
11. Мерзляк А.І. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосв. навч. закл. / А.І. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х.: Гімназія, 2015. 224 с.
12. Мерзляк А.Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосв. навч. закл. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х.: Генеза, 2016. 208 с. Х.: Гімназія, 2015. 224 с.
13. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії: Навч. – метод. посіб. К.: «Магістр-S» 1998. 256 с.
14. Полонський В. Б., Рабинович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії. Навч.-метод. посібник. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. — 240 с.

## Додатковий

15. Антоненко, М.І. Розв'язування геометричних задач: Книжка для вчителя / М.І. Антоненко. Київ : РІШ, 1991. 127 с.
16. Крайзман М. Л. Розв'язування геометричних задач методом координат / М. Л. Крайзман. – К.: РІШ, 1983. – 127 с.
17. Дзик, П. Г. Збірник стереометричних задач на комбінації геометричних тіл / П. Г. Дзик; ред. Я. У. Успенський. - Одеса: Mathesis, 1914. - 1914 с. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115062> (дата звернення: 06.03.2024). - ISBN 978-5-4460-8746-4. - Текст: електронний.

## Ресурси Інтернет

18. <https://www.educon.by/index.php/materials/math/planimetria>
19. <http://liceumilicii.edu.kh.ua/Files/downloads/РЯТІВНИК%20з%20Геометрії-7-11кл.%28укр%29.pdf>
20. <https://ukrliteratura.com/literature/navchalna/4996-antye-i-mantisa-chisla.html>
21. <https://www.youtube.com/watch?v=XLA58vrj-jl>
22. <https://vseosvita.ua/library/zbirnik-zadac-castina-17-geometricni-zadaci-na-dovedenna-93308.htm>
23. <https://naurok.com.ua/dovedennya-nerivnostey-v-geometri-dlya-trikutnika-297362.html>
24. <https://xn--47-kmc.xn--80aafey1amqq.xn--d1acj3b/program/7282-kak-nauchitsya-reshat-zadachi-po-geometrii-10-klass-arkhiv>
25. [https://mathter.pro/angem/2\\_8\\_kak\\_nauchitsya\\_reshat\\_zadachi\\_po\\_geometrii.html](https://mathter.pro/angem/2_8_kak_nauchitsya_reshat_zadachi_po_geometrii.html)
26. [http://matematica.inf.ua/files/program/program\\_all/DG.html](http://matematica.inf.ua/files/program/program_all/DG.html)
27. <https://na5ku.com.ua/uk/geometricni-zavdannya-metodi-virishennya-ta-prikladi/>
28. [https://artemenko.webnode.com.ua/prikladne-programne-zabezpechennya/products/cbm\\_283883/10/](https://artemenko.webnode.com.ua/prikladne-programne-zabezpechennya/products/cbm_283883/10/)