ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Укладачка

к.п.н., доцентка

Кузьмич Л.В.

Зміст

Івано-Франківськ – Херсон- 2024

У шкільному курсі математики здобувачі середньої освіти ознайомлюються з такими основними методами доведень: аналітичним, синтетичним, аналітико-синтетичним (інколи його називають методом руху з двох кінців), методом доведення від супротивного, повної індукції, математичної індукції, методами геометричних перетворень (центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, паралельне перенесення, гомотетія, подібність), алгебраїчним методом, окремими випадками якого є векторний і координатний, а також методами математичного аналізу – метод границь, метод диференціального та інтегрального числення.

Частина цих методів застосовуються і для доведення нерівностей.

Зі способами доведення теорем здобувачі середньої освіти знайомляться в 7 класі. Програмою передбачається вивчення окремої теми «Доведення нерівностей» за підручниками з алгебри 9 класу. Але завдання з цієї теми часто зустрічаються на олімпіадах і слугують гарним засобом розвитку логічного мислення та формування евристичних прийомів розв’язування задач. Також цю тему вивчають у класах з поглибленим вивченням математики. Розглянемо деякі способи доведення .

БУДЕМО РОЗГЛЯДАТИ НЕРІВНОСТІ, СПРАВЕДЛИВІСТЬ ЯКИХ ПОТРІБНО ДОВЕСТИ НА ЗАДАНІЙ МНОЖИНІ ЗНАЧЕНЬ ЗМІННИХ. ЯКЩО ТАКА МНОЖИНА НЕ ВКАЗАНА, ТО МАЄМО НА УВАЗІ, ЩО ЗМІННІ МОЖУТЬ НАБУВАТИ ДОВІЛЬНИХ ДІЙСНИХ ЗНАЧЕНЬ.

Нерівність – твердження про те, що два математичні об’єкти є різними, тобто не дорівнюють один одному. Для упорядкованих множин нерівність може додатково стверджувати, що один із двох елементів менший або більший від іншого.

Такі нерівності, як $x^2 \geq 0, -x^2 - 3 < 0, |x| + |y| \geq 0, (x - y)^4 \geq 0$ виконуються при всіх значеннях змінних.

Наступна нерівність не така очевидна, але, виконавши деякі перетворення, можна переконатись у її правильності [10]:

$$x^2 - 8xy + 17y^2 \geq 0$$

$$x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x - 4y)^2 + y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x, y \in R, \quad (x - 4y)^2 \geq 0 \\ \forall y \in R, \quad y^2 \geq 0 \end{array}\right| \quad (x - 4y)^2 + y^2 \geq 0$$

Залежність між співвідношеннями «>», «<», «=» та значенням різниці лівої і правої частин відповідної нерівності виражає означення.

Означення. Число $a>b$, якщо різниця $a-b>0$; число $a<b$, якщо різниця $a-b<0$; число $a=b$, якщо різниця $a-b=0$.

Що означає довести нерівність?

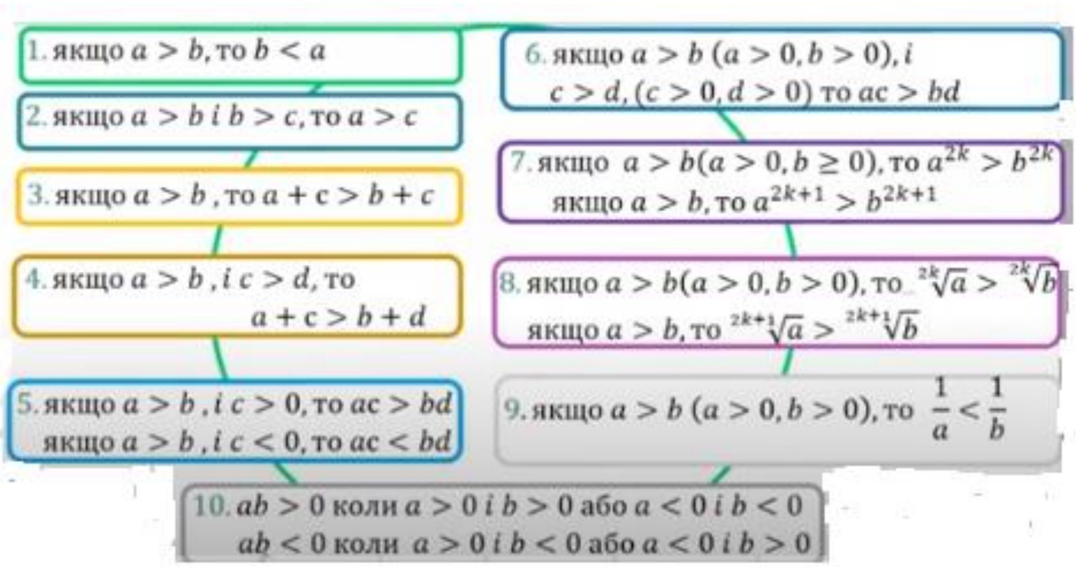
Довести нерівність – надати їй правильність при всіх допустимих значеннях змінних, що входять до неї, тобто переконатися в її справедливості.

При доведенні нерівностей використовують їхні *властивості*:

1. Властивість антирефлексивності: $a>a$, або $a<a$ – хибні висловлення.
2. Властивість антисиметричності: якщо $a>b$, то $b<a$.
3. Властивість транзитивності: якщо $a>b$, $b>c$, то $a>c$.
4. Властивість монотонності додавання: якщо $a>b$, то $a+m>b+m$.
5. Властивість монотонності множення: якщо $a>b$, $c>0$, то $ac>bc$; $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$; якщо $a>b$, $c<0$, то $ac<bc$; $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

Наслідки з властивостей числових нерівностей:

1. Якщо $a<b+c$, то $a-c<b$.
2. Якщо $a>0$, $b>0$ і $a<b$, то $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.



Загального методу доведення нерівностей не існує. Іноді потрібний результат можна отримати, якщо скористатись означенням нерівності, тобто розглянути різницю між лівою і правою частинами нерівностей; іноді буде корисно використати деяку відому нерівність або дати оцінку лівої і правої частин нерівності тощо.

1. Доведення нерівностей за допомогою означень

За означенням вважається, що $a > b$, якщо різниця $a - b > 0$, тобто додатне число., і навпаки, тому: $a - b > 0 \to a > b$,

аналогічно: $a - b < 0, \to a < b$, $a - b = 0, \to a = b$.

Тому для доведення нерівності $f(a, b, \dots, k) > g(a, b, \dots, k)$ на заданій множині значень $a, b, \dots, k$ необхідно скласти різницю $f(a, b, \dots, k) - g(a, b, \dots, k)$ і переконатись у тому, що вона додатна для заданих $a, b, \dots, k$. Аналогічно цей спосіб застосовується для доведення нерівностей виду $f < g$, $f \geq g$, $f \leq g$.

Правило-орієнтир застосування методу доведення нерівностей за допомогою означень

Щоб довести, що нерівність $f(\mathrm{x}) < g(\mathrm{x})$ $(f(\mathrm{x}) > g(\mathrm{x}))$ правильна при будь яких значеннях змінних, треба:

1) знайти різницю лівої і правої частин нерівності: $f(\mathrm{x}) - g(\mathrm{x})$;
2) перетворити (спростити, виділити повний квадрат тощо) різницю так, щоб можна було визначити її знак (тобто порівняти з нулем, а саме: вираз <0, >0, або =0);
3) скориставшись означенням, зробити висновок.

Приклад 1.1. Довести нерівність $x(x-4) < (x-2)^2$.

Доведення. Знайдемо різницю лівої і правої частини нерівності та перетворимо її: $x(x-4) - (x-2)^2 = x^2 - 4x - x^2 + 4x - 4 = -4$.

Оскільки різниця лівої і правої частин нерівості дорівнює $-4 < 0$, то за означенням ліва частина менша правої, тобто при будь яких x.

Деякі джерела, зокрема Математика-9 [10], [11, 196], називають цей метод доведення нерівностей *методом (оцінкою) різниці*.

Метод різниці

1. $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 \geq 6ab$

$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab \geq 0$

$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = a^2b^2 - 4ab + 4 + a^2 - 2ab + b^2 =$

$= (ab-2)^2 + (a-b)^2$

$$\left.\begin{array}{l} \forall a, b \in R, \quad (ab-2)^2 \geq 0 \\ \forall a, b \in R, \quad (a-b)^2 \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow (ab-2)^2 + (a-b)^2 \geq 0 \ \blacktriangle$$

Приклад 1.2. Довести, що якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\textbf{\textit{нерівність Коші}}). \qquad (1)$$

Доведення. Складемо різницю $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ і вияснимо її знак:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Зрозуміло, що цей вираз невід'ємний для будь яких невід'ємних $a,\ b$. Тому й різниця $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$, а це означає, що $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. Відзначимо, що знак рівності має місце лише при $a = b$.

Примітка. Дану нерівність можна записати для трьох, чотирьох, …, n невід'ємних чисел.

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc};\quad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ ,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$.

Приклад 1.3. Довести, що якщо а $b>0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2. \qquad (2)$$

Доведення. Маємо: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$. Причому знак рівності буде лише при $a = b$.

У цьому прикладі дано оцінку суми двох взаємно обернених величин (чисел).

Мають місце і такі нерівності (довести самостійно):

1) $b+\frac{1}{b}\leq -2$, де b <0, рівність досягається при $b=-1$;

2) $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$, де якщо а $,b,c \in R$, рівність досягається при $a=b=c=\pm 1$.

Приклад 1.4. Довести, що $a^2+4b^2+3c^2+14>2a+12b+6c$.

Доведення. Розглянемо різницю $(a^2+4b^2+3c^2+14)-(2a+12b+6c)$.

Перегрупуємо:
$$(a^2-2a+1)+(4b^2-12b+9)+(3c^2-6c+3)+1=$$
$$=(a-1)^2+(2b-3)^2+3\,(c-1)^2+1.$$

Останній вираз завжди додатний як сума квадратів і додатного числа.

Приклад 1.5. Довести, що якщо $a+b+c\geq 0$, то

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc. \qquad (3)$$

Доведення. Розглянемо різницю $a^3+b^3+c^3-3abc$, в якій виділимо куб суми:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-$$
$$-3ab^2-3abc=(a+b)^3-3ab\,(a+b+c)+c^3.$$

Розклавши суму кубів $(a+b)^3+c^3$ на множники, отримаємо:

$$(a+b)^3+c^3-3ab\,(a+b+c)=((a+b)+c)\,((a+b)^2-$$
$$-(a+b)\,c+c^2)-3ab\,(a+b+c)=(a+b+c)\,(a^2+2ab+b^2-$$
$$-ac-bc+c^2-3ab)=(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2-ab-bc-$$
$$-ac)=\frac{1}{2}(a+b+c)\,(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\,((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2).$$

Оскільки за умовою $a+b+c\geq 0$, то отриманий вираз невід'ємний. Звідси випливає істинність даного твердження. Очевидно, що знак рівності має місце у випадку, коли $a+b+c=0$, а також при $a=b=c$.

2. Аналітичний метод

Аналітичним називають такий метод доведення, при якому міркування йдуть від доводжуваного твердження до відомих, від тези до аргументів.

Логічною основою аналітичного методу доведення є аксіома: з *правильного твердження завжди випливає правильний наслідок*. При доведенні аналітичним методом спочатку підшукують таке твердження, з якого випливає доводжуване, потім таке, з якого випливає підшукане раніше, і т. д. доти, доки не приходять до вже відомого твердження. Цей напрям міркувань протилежний тому, який маємо при синтетичному методі.

Зауважимо, що іноді аналітичним методом доведення називають зовсім інший спосіб міркувань, суть якого сформулював ще Евклід (тому його називають *аналізом Евкліда*): «Твердження доводять аналітично, якщо шукане приймають за відоме і на основі виведених звідси наслідків дістають відому істину». Застосуємо такий спосіб міркувань до доведення вже відомої нам нерівності.

Припустимо, що нерівність $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ($a>0$, $b>0$) правильна. Помножимо обидві її частини на 2:

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

Перенесемо $2\sqrt{ab}$ в ліву частину:

$a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$, $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$.

Остання нерівність правильна, бо квадрат дійсного числа не може бути від'ємним. Отже, правильна і доводжувана нерівність.

Такі міркування не можна вважати строгими доведеннями. Тут показано, що з доводжуваного твердження випливає правильний наслідок. А це ще не означає, що доводжуване правильне, бо правильний наслідок можна дістати і з неправильного твердження. Наприклад, рівність -2 = 2 неправильна, проте, підносячи обидві її частини до квадрата, дістанемо правильну рівність 4 = 4.

Отже, аналіз Евкліда *не можна* вважати строгим методом доведення. Проте його зручно застосовувати для *знаходження ще не відомого доведення*, розглядати його як *пошук* доведення, а оформляти саме доведення краще синтетичним методом [20].

Відзначимо деяку поширену типову помилку, яку допускають здобувачі середньої освіти (зокрема, й ті, що проступають у заклади вищої освіти) при розв’язуванні задач на доведення нерівностей. Здобувач освіти пише нерівність, яку потрібно довести, отім робить низку перетворень і нарешті приходить нарешті до відомої нерівності (скажімо, -3<0 або $x^2 \geq 0$); після цього він робить висновок: «Потрібна нерівність доведена». Це – груба логічна помилка.

Отже, після того, як було проведено зведення доводжуваної нерівності до деякої\ відомої нерівності, потрібно потім *обов’язково* перевірити, чи проходять всі міркування у зворотному порядку. Але якщо при виконанні *кожного* перетворення щоразу переконуватись у рівносильності (еквівалентності) перетворень, то проводити зворотні міркування не потрібно.

Доведемо **Приклад 2.1** (нерівність Коші) аналітичним методом.

Доведення. Щоб показати, що при $a > 0$ і $b > 0$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1),$$

досить показати, що $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (2),

бо з цієї нерівності випливає доводжувана. Нерівність (2) випливає з такої:

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \quad \text{або} \quad \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0.$$

Ця нерівність правильна при будь-яких додатних *a* і *b,* бо квадрат дійсного числа не може бути від'ємним.

Отже, доводжувана нерівність правильна, оскільки випливає з правильного твердження.

У шкільних підручниках з математики аналітичний метод називають методом *спрощення нерівностей* (9 клас) [11, 196]: у ряді випадків спрощення виразів, які утворюють нерівність, робить цю нерівність очевидною.

Приклад 2.2. Довести нерівність:

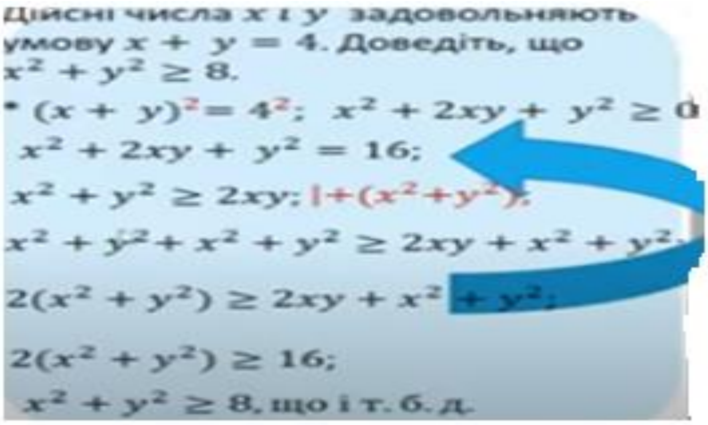
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1, \text{ де } n| \in \mathbb{N}.$$

Доведення.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Початкова нерівність набуває вигляду $1-\frac{1}{n+1}<1$ і стає очевидною.

Приклад 2.3.



Ще один із прийомів, який іноді можна застосувати у аналітичному методі – *метод проміжків*.

Приклад 2.4. Довести, що якщо для будь яких x справедлива нерівність

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Доведення. Розіб'ємо множину R – область зміни змінної x – на такі проміжки: $(-\infty;\ 0]$, $(0,\ 1)$, $[1;\ +\infty)$. Розглянемо знак лівої частини нерівності на кожному з цих проміжків.

1) Якщо $x\leq 0$, то всі парні степені змінної x невід'ємні, а одночлени $(-x^2)$ та $(-x)$ набувають теж невід'ємних значень, тому ліва частина заданої нерівності приймає додатні значення, отже, нерівність на цьому проміжку правильна.

2) Якщо $0<x<1$, то перетворимо ліву частину даної нерівності так:

$$x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x).$$

При вказаних значеннях x вирази в дужках приймають додатних значень, і, отже, дана за умовою нерівність виконується.

3) Нарешті, якщо $x\in[1;\ +\infty)$, тобто $x\geq 1$, тоді ліву частину початкової нерівності запишемо так: $x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1$. Вирази в дужках приймають невід'ємні значення, тому ліва частина завжди додатна.

Таким чином, ми бачимо, що на кожному з розглядуваних проміжків задана нерівність справедлива, отже, вона справедлива для будь яких значень x.

3. Синтетичний метод доведення

Логічною основою в цьому методі доведення є така сама аксіома, як і аналітичного: *з правильного твердження завжди випливає і правильний наслідок*. Відрізняється він від аналітичного (п. 2) тільки напрямом міркувань. Міркування в ньому йдуть від умови і вже відомого твердження до доводжуваного. Такий метод доведення називають *синтетичним*.

Синтетичний метод доведення дуже простий з логічного погляду, такі доведення найбільш переконливі і порівняно короткі. Тому більшість теорем у шкільному курсі математики доводять синтетичним методом.

Але такі доведення не позбавлені і деяких недоліків. Як здогадатися, що доведення наведеного заданого твердження треба починати з певної нерівності? Як здогадатися, в якому напрямі треба виконувати перетворення написаної нерівності, щоб дістати бажаний результат? Синтетичний метод доведення зручний тоді, коли доведення уже відоме і ми хочемо пояснити його іншим. Якщо ж відшукуємо доведення, то зручніша користуватись аналітичним методом.

Суть *синтетичного* методу полягає в тому, що за допомогою низки перетворень нерівність, яку треба довести, виводять із деяких відомих (опорних) нерівностей. В якості опорних нерівностей можна використовувати, наприклад, такі нерівності:

а) $a^2 \geqslant 0$; б) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, де $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 0$, де $ab > 0$;
г) $ax^2 + bx + c > 0$, де $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$.

У джерелах можна знайти й іншу назву цього методу, наприклад, *метод використання очевидних нерівностей* [10]. Якщо для доведення нерівностей використовується очевидна нерівність або її похідні типу $a^2 \geqslant 0$, то кажуть про *метод виділення квадрата двочлена* $(a+b)^2$

Приклад 3. 1 (задача 1. 2). Довести, що якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Доведення. Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, або $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$,
Звідки $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Поділимо обидві частини на 2, дістанемо $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,
Що й треба було довести.

Приклад 3.2. [10, 26] Довести, що для додатних чисел a і b, справедлива нерівність $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$.

Доведення Застосуємо нерівність Коші для додатних чисел a і $\frac{1}{b}$.

Маємо: $\frac{a+\frac{1}{b}}{2}\geq\sqrt{a\cdot\frac{1}{b}}$. Звідси $a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Аналогічно доводимо, що $b+\frac{1}{a}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримаємо:

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Звідси $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$, що і т. б. д.

Приклад 3.3. Довести, що $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$, де якщо $a, b, c\in R$.

Доведення. Візьмемо в якості опорних наступні нерівності:

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$
$$b^2+c^2\geqslant 2bc,$$
$$c^2+a^2\geqslant 2ac.$$

Додавши ці нерівності, а потім поділивши обидві частини отриманої нерівності на 2, приходимо до потрібної нерівності. Рівність досягається при $a=b=c=\pm 1$.

Приклад 3.4. Довести, що якщо $a, b, c, d\geq 0$, то

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}. \qquad (4)$$

Доведення. Візьмемо в якості опорної нерівність Коші:

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}}.$$

Оскільки, в свою чергу, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ и $\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$, то $\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$. Значить $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$. Але $\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$.

Отже, $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Проаналізувавши доведення, робимо висновок, що знак рівності має місце тоді і тільки $a = b = c = d$.

Приклад 3. 4. Довести, що коли $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0,$ то $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Доведення. Перший спосіб.

$$\left.\begin{array}{ll} a \geq 0, b \geq 0, & \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \\ b \geq 0, c \geq 0, & \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \geq 0 \\ a \geq 0, c \geq 0, & \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2 \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ a+c \geq 2\sqrt{ac} \end{array}$$

Почленно перемножимо ці нерівності, звідки і отримаємо правильність заданої нерівності.

Другий спосіб. За основу візьмемо нерівність Коші для попарно взятих доданків:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$
$$a+c \geqslant 2\sqrt{ac}.$$

Перемноживши ці нерівності, отримаємо потрібну нерівність.

Приклад 3.5. Довести, що $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!,$ де $n \in N, n > 1$.

Доведення. Візьмемо в якості опорних нерівності Коші:

$$\frac{n+1}{2} \geqslant \sqrt{n \cdot 1}\ ;\ \frac{(n-1)+2}{2} \geqslant \sqrt{(n-1) \cdot 2}\ ;\ \frac{(n-2)+3}{2} \geqslant \sqrt{(n-2) \cdot 3}\ ;\ \ldots;$$

$$\frac{2+(n-1)}{2} \geqslant \sqrt{2 \cdot (n-1)}\ ;\ \frac{1+n}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot n}\ .$$

Перемноживши ці n нерівностей, отримаємо:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{(n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n)} =$$

$$= \sqrt{n!n!} = \sqrt{(n!)^2} = n!$$,

звідки $$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant n!$$

Так як за умовою $n \neq 1$, то перша з опорних нерівностей Коші може бути лише строгою. Але тоді і після перемноження нерівностей отримана кінцева нерівність має бути строгою. Таким чином, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant n!$, що і потрібно було довести.

Приклад 3.6. Довести, що якщо $a, b, c > 0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Доведення. ***1 спосіб***. Візьмемо в якості опорних такі нерівності:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2;\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2$$,

які стають рівностями у випадках $a = b$; $a = c$; $b = c$. Додавши їх почленно, отримаємо $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 6,$ або $\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geqslant 6.$

Далі виконаємо ще деякі тотожні перетворення:

$$\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geqslant 9,$$

$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c} \geqslant 9.$$

Винесемо за дужки $a + b + c$, отримаємо:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Знак рівності буде лише у випадку, коли $a = b = c$.

2 спосіб. Дану нерівність можна довести і за означенням.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=$$

$$=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1-9=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-6=$$

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)=$$

$$=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-c)^2}{ac}+\frac{(b-c)^2}{bc}\geqslant 0.$$

Приклад 3.7. Довести, що якщо $n \in N, n > 1$, то

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Доведення. Оцінимо кожен доданок:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\cdot 2}<\frac{1}{1\cdot 2}\ ;\ \frac{1}{9}=\frac{1}{3\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3}\ ;\ \frac{1}{16}=\frac{1}{4\cdot 4}<\frac{1}{3\cdot 4}\ ;\ \ldots$$

$$\ldots;\ \frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{(n-1)\,n}.$$

Додавши ці $(n-1)$ нерівностей, отримаємо:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}=$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\,n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

Отже, $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$

4. Метод застосування раніше доведеної нерівності

Під час доведення нерівностей можна використовувати раніше доведені нерівності. Прикладом застосування цього методу є **Задача 3.2** даної теми із використанням нерівності Коші для двох чисел $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$.

Приклад 4.1. При доведенні наступної нерівності за основу взято нерівність Коші-Буняковського.

Довести нерівність
$\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}\le 2.$

За нерівністю Коші-Буняковського
$\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}\right)^2=$
$=\left(1\cdot\sqrt{5-x}+1\cdot\sqrt{x-3}\right)^2\le$
$\le(1^2+1^2)\cdot(5-x+x-3)=$
$=2\cdot 2=4;$
$\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}\right)^2\le 4$ і
тому $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}\le 2$, що і треба було довести.

Приклад 4.2. Джерело [23] яскраво демонструє доведення нерівності Коші-Буняковського і застосування її до доведень інших нерівностей на уроках з поглибленим вивченням математики у 9 класі [11].

Нерівність Коші—Буняковського

При будь-яких значеннях $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ виконується нерівність

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\leqslant\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right).$$

5. Доведення нерівностей методом від супротивного

Одним із методів доведення тверджень є *доведення від супротивного*. Метод від супротивного – це метод доведення теорем (тверджень), у якому робиться припущення, що висновок теореми неправильний. На підставі цього припущення за допомогою логічних міркувань отримується факт, який суперечить доведеним раніше властивостям.

Правило-орієнтир застосування методу від супротивного:

- припустити, що твердження задачі неправильне, а правильне – протилежне (супротивне) до нього – тобто сформулювати твердження, протилежне (супротивне) до того, що треба довести;
- із зробленого припущення вивести наслідки та знайти у них суперечність (невідповідність умові задачі) – тобто довести його хибність;
- зробити висновок про те, що оскільки припущення неправильне, то правильне твердження із умови задачі.

Приклад 5.1. Доведемо тепер методом від супротивного нерівність Коші:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\quad (a > 0, b > 0).$$

Доведення. Припустимо, що при деяких a > 0 і b > 0 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$. Тоді a + b < 2$\sqrt{ab}$, a - 2$\sqrt{ab}$ +b< 0, $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2<0$. Остання нерівність не може бути правильною ні при яких додатних a і b. Отже, припущення неправильне. Тому при всіх додатних a і b має місце нерівність $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, що т. б. д.

Щоб успішно користуватись методом від супротивного, треба вміти заперечувати різні висловлення, в тому числі і висловлення із *кванторами*. Спостереження показують, що при цьому здобувачі освіти нерідко допускають помилки. Так, заперечуючи висловлення «при всіх додатних a і b $a + b \geq 2\sqrt{ab}$», здобувачі освіти нерідко пишуть «при всіх додатних a і b $a + b < 2\sqrt{ab}$». Це висловлення не є запереченням першого, бо замість слова «всіх» тут треба написати «деяких», адже

$$\overline{(\forall x P(x))} = (\exists x)\overline{P(x)} \quad \text{і} \quad \overline{(\exists \tilde{o})Ð(\tilde{o})} = (\forall \tilde{o})\overline{Ð(\tilde{o})}.$$

Зрозуміло, що у школі оперувати подібними записами не слід. Однак на конкретних прикладах здобувачам освіти треба показати, що, заперечуючи висловлення зі словом «всіх», останнє замінюємо словом «деяких» і навпаки. Можна запропонувати здобувачам освіти проаналізувати, наприклад, і таке «доведення» методом від супротивного:

«Довести, що при всіх додатних a і b : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення. Припустимо, що при всіх додатних a і b $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

Це припущення неправильне, бо, наприклад, неправильною є нерівність $\frac{1+9}{2} < \sqrt{1 \cdot 9}$. Отже, правильною є доводжувана нерівність».

Де тут помилка? У спростуванні припущення? Ні, бо щоб спростувати висловлення «при всіх додатних 0 і b $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$», досить навести один приклад. Помилку допущено в запереченні. У ньому слово «всіх» треба замінити на «деяких».

Зауваження. У сучасній математиці існує окремий напрям — інтуїціонізм, прихильники якого не визнають закону виключеного третього, а отже, не користуються методом доведення від супротивного. Пояснюють це тим, що застосування цього закону в теорії нескінченних множин призводить до суперечностей. Що ж до предметів, які вивчаються в шкільній математиці, то для них закон виключеного третього завжди виконується. Отже, у школі доведення методом від супротивного завжди допустимі; вони такі самі строгі, як і інші доведення, що не пов'язані з законом виключеного третього.

Приклад 5.2.Довести, що якщо a $\geq 0,\ b \geq 0$, c $\geq 0,\ d \geq 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}\sqrt{cd} \qquad (1)$$

Доведення. Тут потрібно довести, що для *будь яких* невід'ємних значень а, b, с, d виконується нерівність (1). Припустимо протилежне, що *існує* набір невід'ємних значень а, b, с, d, для якого не виконується нерівність (1), тобто ця нерівність неправильна, а правильною буде нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab}\sqrt{cd}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності невід'ємні, то при піднесенні їх до квадрату отримаємо: $(a+c)(b+d) < ab + cd + 2\sqrt{abcd}$,

звідки $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$, $\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{(bc)(ad)}$, але це протирічить нерівності Коші. Отже, припущення неправильне, а тому справедлива нерівність (1), що т.б.д.

Приклад 5.3. Довести, що якщо а ≥ 0, $b \geq 0$, с ≥ 0, то

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \qquad (2).$$

Доведення. Припустимо протилежне, що *існує* набір невід'ємних значень а, b, с, для якого нерівність (2) неправильна, тобто виконується нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

При піднесенні обох частин нерівності до квадрату отримаємо:

$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, а далі $(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2)$,

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0,$$
$$3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0,$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc < 0,$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 < 0.$$

Остання нерівність неправильна, тому що сума квадратів не може бути від'ємною. Значить, припущення неправильне, а тому правильною є нерівність (2), що т. б. д.

У 9 класі за підручником [10, 25] цим методом доведено частинний випадок *нерівності Коші—Буняковського:*

ПРИКЛАД 1 Для будь-яких чисел a_1, a_2, b_1, b_2 доведіть нерівність

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2). \qquad (*)$$

Розв'язання. Припустимо, що нерівність, яку доводимо, є неправильною. Тоді знайдуться такі числа a_1, a_2, b_1, b_2, що буде правильною нерівність

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Звідси

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$

$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$

$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Остання нерівність є неправильною. Отримана суперечність означає, що нерівність (*) є правильною. ◄

Більш загальний вигляд *нерівності Коші—Буняковського:*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

6. Доведення нерівностей методом математичної індукції

Метод математичної індукції ґрунтується на *принципі математичної індукції*, що формулюється так:

деяке твердження A(n) істинне для будь-якого натурального n, якщо:

1) воно істинне для n = 1;

2) з того, що A(n) істинне для довільного натурального k = n випливає, що воно істинне для наступного натурального числа n = k +1.

Сформульований принцип належить до *аксіом* натуральних чисел.

Кожне доведення *методом математичної індукції* передбачає реалізацію трьох етапів:

1) на першому етапі перевіряємо, що істинним є твердження A(1) ;
2) на другому припускаємо, що істинним є твердження A(k) і, виходячи з цього,
3) доводимо, що істинним є твердження A(k +1). Виконані міркування дозволяють стверджувати, що, на основі принципу математичної індукції, твердження A(n) істинне для будь-якого натурального n. Відповідний висновок завершує третій етап і все доведення.

Іноді використовують *узагальнений принцип математичної індукції*:

твердження A(n) істинне для будь-якого натурального n ≥ m, якщо воно правильне для натурального числа n = m і з того, що A(n) істинне для довільного натурального n = k ≥ m випливає, що воно істинне для наступного натурального числа n = k +1.

Описаний метод широко використовується при обґрунтуванні різних математичних тверджень, зокрема при доведенні нерівностей. Розглянемо це на прикладах.

Приклад 6.1. Довести, що якщо $n \in N, n \geq 3,$ то $2^n > 2n + 1$.

Доведення. При $n = 3$ нерівність правильна: $2^3 > 2 * 3 + 1$. *Припустимо,* що ця нерівність виконується для n=k (k≥ 3), тобто припустимо, що $2^k > 2k + 1$ і *доведемо,* що задана нерівність виконується і для n=k+1, тобто доведемо, що $2^{k+1} > 2k + 3$.

Справді: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2\,(2k+1) = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1)$.

Таким чином $2^{k+1} > (2k+3)+(2k-1)$.

Але 2k+1>0 для будь якого натурального значення k. Отже, тим більше $2^{k+1} > 2k+3$.

Відповідно до принципу математичної індукції можна зробити висновок про те, що задана нерівність справедлива для всіх $, n \geq 3$.

Приклад 6.2 Довести, що якщо $n \in N,$ то $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$.

Доведення. Вираз, що міститься у правій частині заданої нерівності, являє собою суму дробів, знаменники яких є натуральними числами від 1 до 2^n-1.

При $n = 1$ дана нерівність перетворюється у правильну числову нерівність 1>1/2.

Припустимо, що ця нерівність має місце для n = k, тобто

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} > \frac{k}{2}.$$

Доведемо, що тоді задана нерівність справедлива і для n = k+1, тобто

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{2}.$$

Дійсно, $S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^k} + \right.$

$+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\Big)=S_k+P_k$, де $P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$.

Вираз P_k являє собою суму 2^k дробів, кожен з яких більший за $\frac{1}{2^{k+1}}$. Значить,

$$P_k=\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}-1}>\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}=$$

$$=2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $S_k>\frac{k}{2}$, $P_k>\frac{1}{2}$. Але тоді $S_{k+1}=S_k+P_k>\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$, тобто

$$S_{k+1}>\frac{k+1}{2}.$$

На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що задана нерівність справедлива для будь якого $n\in N$.

Має місце *нерівність Бернуллі*, класична форма якої формулюється так: якщо $x > -1$, то для будь-якого натурального $n\geq 1$ правильна нерівність

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

де рівність досягається при x=0 або n=1. Рівність досягається також у таких випадках: за будь-яких $x \neq -1$, $n = 0$, $n = 1$; або при $x = -1$ будь-які $n \neq 0$. Доведення цієї нерівності проводиться методом математичної індукції.

Приклад 6.3. Довести нерівність:

$$(1+h)^n \geq 1+nh,$$

де $h > -1$, $n \in N$ (*нерівність Бернуллі*).

Доведення. 1. Перевіримо правильність нерівності для $n=1$:
$1 + h = 1 + h$.

2. Нехай нерівність правильна, якщо $n=k$: $(1 + h)^k \geq 1 + kh$.

3. Доведемо, що вона правильна і тоді, коли $n = k + 1$, тобто

$$(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h.$$

Маємо:

$(1+h)^{k+1} = (1 + h)^k(1 +h) \geq (1 +kh)(1 +h) = 1 + (k+ 1)h+kh^2 \geq 1 + (k+ 1)h$.

Отже, $(1+h)^n \geq 1+nh$.

4. За принципом математичної індукції нерівність правильна для всіх $n \in N$.

У математиці відомі й інші схеми міркувань методом математичної індукції, але в школі їх не розглядають.

Метод математичної індукції вперше почали застосовувати в XVI-XVII ст. Мавроліко, Паскаль, Бернуллі та інші математики. Широко відомим він став тільки в XIX ст.

Іноді метод математичної індукції називають ще методом досконалої індукції, методом повної математичної індукції, методом переходу від n до n+1 і т. д.

7. Класичні нерівності між середніми

Із середніми величинами часто зустрічаються у статистиці, фізиці, техніці. Їх використання зумовлене необхідністю оцінювати результати багаторазових вимірювань одних і тих самих величин, а також багаторазового визначення дослідним шляхом одних і тих самих параметрів.

Середньою величиною в статистиці називаються кількісний показник характерного, типового рівня масових однорідних явищ, який складається під впливом загальних причин і умов розвитку. У зв'язку з цим середні величини відносяться до узагальнюючих статистичних показників, які дають зведену, підсумкову характеристику масових суспільних явищ. Середнє значення - це один елемент, здатний передати суть цілої групи елементів. Найпростіший спосіб порівнювати сукупності даних, виражених в різних шкалах чи згрупованих за різними ознаками, – порівнювати за **середніми значеннями**.

Середнім для n дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будемо називати довільне дійсне число x, яке не перевищує найбільшого із заданих чисел та не менше від найменшого, тобто $\min x_i \le x \le \max x_i$, i =1, 2, … , n. Якщо $\min x_i < \max x_i$, то середніх є безліч.

У математиці найбільш поширеними середніми є середнє арифметичне, середнє геометричне, середнє квадратичне та середнє гармонійне. Всі вони пов’язані між собою певними залежностями, які ми називаємо класичними нерівностями між середніми.

Розглянемо детальніше класичні середні та співвідношення (нерівності) між середніми.

Середнє арифметичне n чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — частка від ділення суми цих чисел на їх кількість:

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Середнє геометричне n чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ дорівнює кореню n -го степеня із добутку даних чисел:

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Середнє квадратичне n чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ дорівнює кореню квадратному із середнього арифметичного квадратів набору даних чисел:

$$K_n = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

Середнє гармонійне n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — частка від ділення кількості n цих чисел на суму обернених до них чисел:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

Ці середні величини знаходяться у *співвідношеннях*

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n.$$

Навіть така проста на перший погляд задача, як «середнє значення», має безліч застосувань. Ми розглянули лише найуживаніші основні середні і не торкнулися багатьох інших - середньозваженого, середньоквадратичного, центру ваги, математичне сподівання тощо. Але слід виділити головні принципи:

Середнє значення покликане відобразити основну суть всіх елементів в групі Тип середнього значення залежить від того, як взаємодіють елементи в групі (Додаються? Множаться? Стають оберненими величинами? Просто вибираються?). Вибір середньої величини, в загальному, здійснюється в залежності від умов реальної задачі (Таблиця 1).

Таблиця 1

Формули та використання найуживаніших середніх величин

Вид середнього	Гармонійне (англ. harmonic medium) H_n	Геометричне (англ. geometric mean) G_n	Арифметичне (англ. arithmetic mean) A_n	Квадратичне (англ. Root mean sqare, RMS, rms, quadratic mean)
Показник степеня	-1	1	0	2
Формула	$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$	$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ або $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$
Для двох чисел	$h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ або $h = \frac{2xy}{x+y}$	$g = \sqrt{xy}$	$a = \frac{x+y}{2}$ або $a = \frac{1}{2}(x+y)$	$q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$
Де використовується	при розрахунку швидкості, обсягів виробництва,	інвестиції, зростання, обсяг; коли	відмінно працює для сукупностей,	обраховується для обчислення середньої

	вартості; тоді, коли один і той же обсяг роботи виконується на різних швидкостях; коли необхідно, щоб при усередненні незмінною залишалась сума величин обернених усереднюваним, найчастіше коли параметри ряду зв'язані з часом і продуктивністю.	значення параметра виражають відносні величини динаміки, побудовані в вигляді ланцюжкових величин, як відношення кожного наступного члена ряду до попереднього, найчастіше зустрічається в бізнес-задачах з відсотками і долями, якщо в задачі якість показники змінюються (ростуть чи падають). допомагає знайти «типовий елемент» серед групи елементів, що взаємодіють один з одним шляхом множення	значення яких легко додаються (підсумовуютьс я); просто обчислюються; інтуїтивно зрозумілі	величини сторін *n* квадратних ділянок, середніх діаметрів труб, значень напруги і сили змінного струму – для обчислення яких використовується квадратична функція; у звукотехніці під СК розуміють таке значення потужності, при якій нелінійні спотворення вихідного сигналу не перевищують вказаний рівень

Вище ми вже розглянули методи доведення деяких нерівностей (п. 1-3), а саме:

Нерівність Коші

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}, \quad a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0.$$

Оцінка суми двох взаємно обернених чисел

Якщо $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Якщо $b<0$, то $b+\frac{1}{b}\leqslant -2$.

Оцінка суми квадратів двох чисел

$a^2+b^2\geqslant 2ab.$

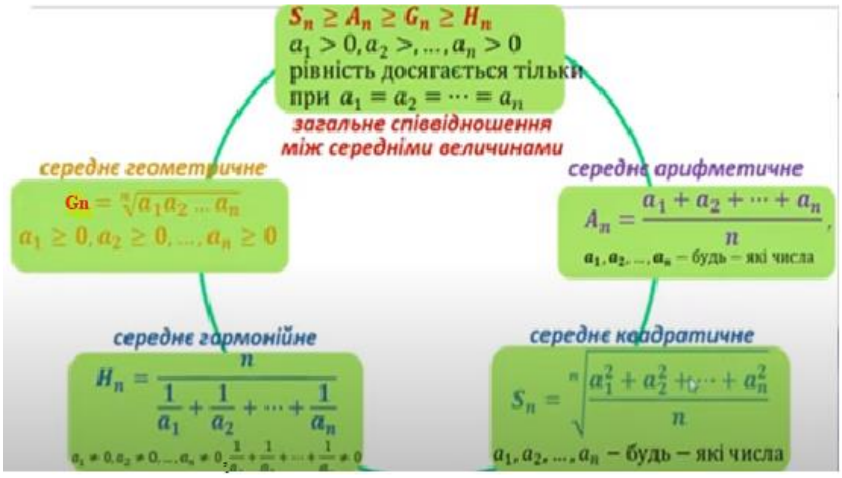
Оцінка суми квадратів трьох чисел

$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$ для $a, b, c \in R$

Оцінка суми кубів трьох чисел

$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$, якщо $a+b+c\geq 0$ та інші.

Дамо тепер оцінку середнім величинам:



$$S_n\geq A_n\geq G_n\geq H_n$$

або у формулах:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$$

Є ряд способів їх доведення. Розглянемо деякі з них.

Приклад 7.1. Довести нерівність Коші для n невід'ємних чисел:

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}. \qquad (7.1),$$

тобто що $A_n\geq G_n$.

Доведення. Для n=2 нерівність доведена (приклади 1.2, 2.1, 3.1 та іншими методами). Нехай нерівність (7.1) має місце для $n=m$, тоді вона буде справедлива і для $n=2m$. Дійсно,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2m}}{2m}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}}{m}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[m]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdots\frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}}\geqslant\sqrt[2m]{a_1a_2\ldots a_{2m}}.$$

Так як нерівність (7.1) має місце для $n=2$, то воно буде виконуватися для $n=4$, 8 і т. д., тобто для будь якого $n=2^p$ (р=1, 2, …).

Нехай тепер n – довільне натуральне число. Якщо $n\neq 2^p$, то знайдемо таке натуральне s, що $n+s = 2^p$. Тоді для будь яких невід'ємних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+s}$, відповідно до доведеного, справедлива нерівність

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+s}}{n+s}\geqslant\sqrt[n+s]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{n+s}}.$$

Поклавши в цій нерівності $a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=a_{n+s}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$,

отримаємо

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)s}{n}}{n+s}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt[n+s]{a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^s},$$

звідки, позначивши $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A_n$, знайдемо $A_n\geqslant\sqrt[n+s]{a_1a_2\ldots a_n\cdot A_n^s}$.
Піднесемо обидві частини останньої нерівності до степеня $n+s$, знайдемо

$(A_n)^{n+s}\geqslant a_1a_2\ldots a_n\,(A_n)^s$, звідки після множення на $(A_n)^{-s}$, отримаємо

$(A_n)^n\geqslant a_1a_2\ldots a_n$.

Нарешті, добуваючи корінь n-го степеня, знайдемо $A_n\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$,

або $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}.$

Таким чином, нерівність (7.1) доведена для будь якого n.

Покажемо, що рівність у (7.1) рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Очевидно, що при $a_1=a_2=\ldots=a_n$, то співвідношення (7.1) перетворюється у рівність. Доведемо, що якщо хоча б два із чисел

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ не рівні між собою, то у (7.1) ліва і права частини не рівні між собою. Нехай, наприклад, $a_1 \neq a_2$. Тоді

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\ldots+a_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n}.$$

Але оскільки $a_1 \neq a_2$, то $\frac{a_1+a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$. Отже, якщо всі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ додатні, то

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3 \ldots a_n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

і тому

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Якщо хоча б одне із чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дорівнює нулю, то нерівність (7.1) також правильна.

***Приклад* 7.2.** Довести нерівність $S_n \geq A_n$, тобто що середнє квадратичне не менше за середнє арифметичне, а саме: $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2}$. (7.2)

Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} < \frac{x_1+x_2}{2}$. Після піднесення до квадрату обох частинах нерівності з невід'ємними виразами отримуємо $2x_1^2+2x_1^2<(x_1+x_2)^2$ або $(x_1-x_2)^2<0$, що неправильно. Таким чином, зроблене припущення неправильне, а правильним є твердження задачі. Отже, $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2}$, тобто $S_n \geq A_n$.

Зауваження. Це твердження можна довести методом математичної індукції (проведіть доведення самостійно).

***Приклад* 7.3.** Довести нерівність $G_n \geq H_n$: середнє геометричне не менше за середнє гармонійне, або $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$.

Доведення. Використаємо синтетичний метод, скориставшись нерівністю Коші $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ з використанням заміни:

$$a_1 = \frac{1}{x_1},\ a_2 = \frac{1}{x_2}, \ldots,\ a_n = \frac{1}{x_n}.$$

Отже, нами доведено всі нерівності $S_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$. Рівності у них виконуються лише у випадку рівності між собою всіх x_i.

Співвідношення між середніми часто використовуються як опорні при доведенні інших нерівностей. Розглянемо таку задачу.

***Приклад* 7.4.** Довести, що для всіх невід'ємних *a, b, c* має місце нерівність

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

Доведення. Відомо з раніше доведеної нерівності Коші, що

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Перемноживши почленно дані нерівності, отримаємо нерівність, що т. б. д.

***Приклад* 7.5.** Довести, що для довільних додатних *a, b, c* має місце нерівність $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Доведення. Додамо до обох частин нерівності число 3 і згрупуємо доданки у лівій частині нерівності:

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 + \frac{b}{a+c}\right) + \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2} + 3,$$

$$\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right) + \left(\frac{a+b+c}{a+c}\right) + \left(\frac{a+b+c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Застосуємо до доданків зліва оцінку середньої арифметичної та середньої гармонійної, звідки:

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{b+c}\right) + \left(\frac{a+b+c}{a+c}\right) + \left(\frac{a+b+c}{a+b}\right)}{3} \geq$$

$$\geq \frac{3}{\frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c}} = \frac{3}{2},$$

, що і т. б. д.

8. Метод геометричної інтерпретації

Дамо геометричне доведення (тлумачення) нерівності Коші:

Приклад 8.1 (1.2, 2.1, …). Довести, що для довільних невід'ємних a, b виконується $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доведення. Якщо хоча б одне з чисел a, b дорівнює нулю, то нерівність очевидна. Розглянемо тепер випадок, коли $a>0$, $b>0$. Нехай AB і BC – суміжні відрізки прямої, що мають відповідно довжини a, b (рис. 8.1).

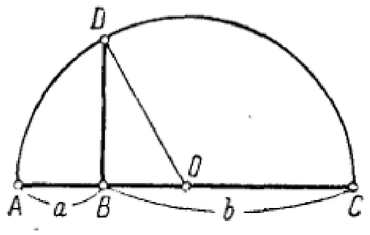


Рис. 8.1

На відрізку AB довжини $a+b$ як на діаметрі побудуємо коло; центр цього кола позначимо через O. Якщо точка D – точка перетину кола з перпендикуляром, що проведений до прямої AC через точку B, то (за відомою теоремою з планіметрії) $BD = \sqrt{ab}$. Далі, $OD = \frac{a+b}{2}$ і, очевидно, $BD \leq OD$, тобто $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, що т. б. д.

З доведення видно, що рівність має місце при $a=b$.

Приклад 8.2 (7.1 – 7.3, 2.1, …). Довести, що для довільних додатних a, b виконуються співвідношення між середніми: $S_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$.

Доведення. Середнім гармонійним цих чисел буде число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, а середнім квадратичним – число $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Доведемо, що середні величини пов'язані нерівностями $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Дамо наступну геометричну ілюстрацію цих нерівностей (рис. 8.2).

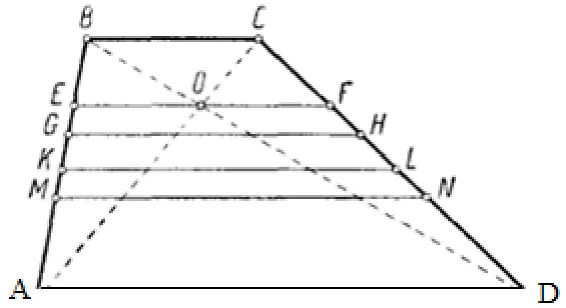


Рис. 8.2

Нехай ABCD – трапеція з основами $AD=a$, $DC= b$; O – точка перетину діагоналей. Тоді:

а) Середнє арифметичне $\frac{a+b}{2}$ двох чисел a, b дорівнює довжині середньої лінії трапеції KL;

б) середнє геометричне $\sqrt{ab}$ цих чисел дорівнює довжині відрізка GH, який паралельний основам AD, BC і має ту властивість, що трапеції BCHG і GHDA - подібні;

в) середнє гармонійне $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ дорівнює довжині відрізка EF, який паралельний до основ і проходить через точку O;

г) середнє квадратичне $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ цих чисел дорівнює довжині відрізка MN, який паралельний до основ і розбиває трапецію ABCD на дві рівновеликі трапеції.

Приклад 8.3. [11, 25**].** Довести нерівність

$$\sqrt{99\cdot101}+\sqrt{98\cdot102}+\ldots+\sqrt{2\cdot198}+\sqrt{1\cdot199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Розв'язання. **Розглянемо чверть кола радіуса 1 із центром *O*. Впишемо в неї ступінчасту фігуру, яка складається з 99 прямокутників, так, як показано на рисунку 8.3 . Маємо:**

$$OA_1=A_1A_2=\ldots=A_{98}A_{99}=\frac{1}{100}.$$

Площа першого прямокутника

$$S_1=OA_1\cdot AA_1=OA_1\cdot\sqrt{1-OA_1^2}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}}=\frac{\sqrt{99\cdot101}}{100^2}.$$

Для другого прямокутника маємо:

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2} \text{ і т. д.}$$

$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}.$$

Площа ступінчастої фігури менша від площі чверті круга, тобто

$$\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2} + \frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2} + \ldots + \frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2} < \frac{\pi}{4}.$$

Звідси випливає нерівність, що доводиться.

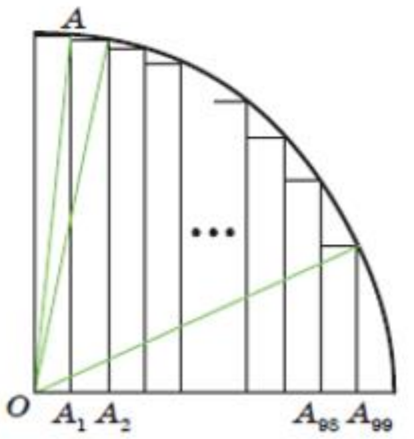


Рис. 8.3

Питання для самоконтролю

1. Сформулювати означення нерівності. Навести приклади.
2. Що означає «довести твердження»? А спростувати?
3. Що означає «довести нерівність»?
4. Сформулюйте означення середнього арифметичного та середнього геометричного двох чисел.
5. Порівняйте середнє арифметичне і середнє геометричне двох додатних чисел.
6. Які нерівності є очевидними, тобто виконуються при всіх значеннях змінних, які до них входять?
7. Дано доведення нерівності, прокоментувати кожний логічний крок його.

$$a^2b^2 + a^2 + b2 + 4 \geq 6ab.$$

Доведення. $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = a^2b^2 - 4\,ab + 4 + a^2 - 2ab + b^2 = (ab - 2)^2 + (a-b)^2 \geq 0$. $(ab-2)^2 \geq 0$, $(a-b)^2 \geq 0$. Отже, нерівність доведена.

8. Про що вам говорять прізвища видатного французького вченого Огюстена Луї Коші та видатного українського вченого Віктора Яковича Буняковського?
9. Значення яких виразів називають середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним, середнім гармонічним двох чисел a і b?
10. Які нерівності виражають зв'язок між середніми величинами?
11. Запишіть нерівність Коші—Буняковського для наборів чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
12. За яких умов у нерівності Коші—Буняковського досягається рівність?

Завдання для самостійної роботи

1. Доведіть, що півсума квадратів двох дійсних чисел не менша від квадрата їх півсуми.
2. Доведіть, що сума квадратів двох будь-яких дійсних чисел не менша від їх подвоєного добутку.
3. Що більше: а) сума квадратів двох додатних чисел чи квадрат їх суми; б) сума квадратів двох від'ємних чисел чи квадрат їх суми?
4. Доведіть, що півсума квадратів двох дійсних чисел не менша від квадрата їх півсуми.
5. Доведіть нерівність:
   1. $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.
   2. $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.

3. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

4. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

5. $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

6. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6$, де a>0, b>0, c>0, a≠b≠c.

7. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$, де x та y – додатні дійсні числа і такі, що $x + y = 1$.

8. $(a+2)(b+6)(c+3) \geq 48\sqrt{abc}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

9. $(a+7)(a+1) < (a+4)^2$;

10. $(a+b)(ab+1) \geq 4ab$, де $a \geq 0, b \geq 0$.

11. $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$, де $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,

12. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$,

13. $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 8\sqrt{xy}$;

14. $a < \frac{a+b}{2} < b$, якщо $a < b$.

15. $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + a + b$.

16. $5a^2 - 6ab + 5b^2 \geqslant 0$.

17. $(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \geqslant (a^3 + b^3)^2$.

18. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 \geq 0$, $x \neq 0, y \neq 0$.

6. Довести , що при всіх натуральних n, більших за 4, правильна нерівність $2^n > n^2$.

Контрольна робота

Довести нерівності

I. Для всіх невідємних чисел

1. $a^n + b^n \leqslant (a + b)^n$, де n — натуральн е число.

2. $\frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

3. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geqslant 64ab(a + b)^2$.

4. $(a + b + c)^2 \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

5. $ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c) \geqslant 6abc$.

6. $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geqslant 0$.

7. $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y) \leqslant xyz$.

8. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 9abc$.

II. Для $n \geqslant 2$

1. $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. $2\sqrt{n}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$

4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^n-1}<n$.

5. $s_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$ для всіх натуральних чисел.

6. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}<2.$ для всіх натуральних чисел n≥1.

7. $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$ для всіх натуральних чисел n>2.

8. $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}>n$, якщо $n=2,\ 3,\ 4,\ \dots,$

III. Порівняти два числа

1. а) $a=\sqrt[4]{9-\sqrt{15}},\ b=\sqrt{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}}$ б) $a=\log_{1,5}5,5,\ b=\log_2 10.$

2. а) $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}},\ b=\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}.$ б) $a=\log_4 12,\ b=\log_6 13;$

3. а) $a=\sqrt[4]{79+\sqrt[3]{26}},\ b=\sqrt[4]{84-\sqrt[3]{28}};$ б) $a=\log_{20}80,\ b=\log_{80}640.$

4. а) $a=\sqrt[4]{28-2\sqrt{2}},\ b=\sqrt[4]{29-\sqrt[3]{42}}.$ б) $a=\log_6 14,\ b=\log_7 18;$

5. а) $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{7},\ b=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}$ б) $a=\log_3 16,\ b=\log_{16}729.$

6. а) $a=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2},\ b=\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}.$ б) $a=\log_2 3,\ b=\log_5 8;$

7. а) $a=\sqrt{3}+\sqrt{23}+\sqrt{53},\ b=\sqrt{13}+\sqrt{33}+\sqrt{43};$ б) $a=\log_4 26,\ b=\log_6 17;$

8. а) $a=\sqrt{12}+\sqrt{32}+\sqrt{52},\ b=\sqrt{2}+\sqrt{22}+\sqrt{72}.$ б) $a=\log_4 2,\ b=\log_{0,0625}0,25$

Список використаної літератури

1. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2009. – 288с.
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. – 3-тє вид., переробл. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367с.
3. Капіносов А.М. Основи технології навчання: Посібник, Б-ка журналу «Математика в школах України», – Харків: Видавнича група «Основа», 2006.

4. Коваленко В.Г., Гельфанд І.Ф., Ушаков Р.П. доведення нерівностей. – К.: Вища шк., 1979.
5. Ковтонюк М.М. Алгебра та початки аналізу. Б-ка журналу «Математика в школах України».– Харків: Видавнича група «Основа», 2006 р.
6. Козира В. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів, пов’язаних з доведенням нерівностей // Математика в школі. – №2 – 3. – 1995.
7. Копцюх М.Г., Савич Е.Ф. Доказательство неравенств. – К.: Рад. Школа, 1982. – 160с.
8. Маркова І.С. Інтерактивні технології на уроках математики: Посібник.–Харків: «Основа», 2006.
9. Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. з поглибл. вивченням математики. – Х.:Гімназія,2009. – 386с.
10. Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. – Х.:Гімназія,2009. – 320с.
11. Мерзляк А.Г., Полянський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 9 кл. з поглибл. вивченням математики. – Х.:Гімназія,2009. – 394с.
12. Микуленко Н.М. Середні та їх геометричне тлумачення. https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/download/1527/pdf
13. Орач Б. Методи доведення нерівностей // Математика. - №19(319). – Травень 2005. – сс.11-15.
14. Програма для класів з поглибленим вивченням математики, 8-11 класи (Уклад: Бурда М., Жалдак М. , Колесник Т., Хмара Т., Ядренко М. – К.: «Шкільний світ», 2001р.
15. Програма з математики для 5-12 кл. загальноосвітніх навчальних закладів.- К, 2008.
16. Програма з математики для 8-9 кл. для загальноосвітніх навчальних закладів (класів) з поглибленим вивчення математики.- К, 2008.
17. Прокопенко Н.С., Щекань Н.П. Відкриті уроки з математики. – Харків.: Видавнича група «Основа», 2006.
18. Слєпкань З.І. методика навчання математики: Підручник. – 2-ге вил., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 2006. – 582с.

Інтернет джерела

19. https://www.youtube.com/watch?v=f3WNbemV0tY
20. https://www.google.com/search?sca_esv=98989144458a5fc8&rlz=1C1SQJL_ruDE1023DE1023&sxsrf=ACQVn09ll99XBpf2mwrL8BWVIZ27mXztAw:1710516981729&q=%D0%AF%D0%BA+%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B8+%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C+9+%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81&sa=X&ved=2ahUKEwi1oMyozPaEAxUwc_EDHVyKBwsQ1QJ6BAggEAE&biw=1366&bih=607&dpr=1#fpstate=ive&vld=cid:0cd860d6,vid:1ugVYoCppco,st:0
21. https://naurok.com.ua/sposobi-dovedennya-osnovnih-chislovih-nerivnostey-42153.html
22. https://www.youtube.com/watch?v=DG-B51QV8tY
23. https://www.google.com/search?q=%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C+%D0%BA%D0%BE%D1%88%D1%96+%D0%B1%D1%83%D0%BD%D1%8F%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE+9+%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81&sca_esv=6f88916183dd8d69&rlz=1C1SQJL_ruDE1023DE1023&sxsrf=ACQVn09A3hNddusSojZWLgm60zC53gjKFg%3A1710834007602&ei=V0H5ZdKrJIGqxc8Px66FsA4&udm=&oq=%D0%BD%D0%B5%D1%80%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%96%D1%81%D1%82%D1%8C+%D0%BA%D0%BE%D1%88%D1%96+%D0%B1%D1%83%D0%BD%D1%8F%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE&gs_lp=Egxnd3Mtd2l6LXNlcnAiONC90LXRgNGW0LLQvdGW0YHRgtGMINC60L7RiNGWINCx0YPQvdGP0LrQvtCy0YHRjNC60L7Qs9C-KgIIATIFEAAYgAQyBRAAGIAESJicAVCoCFi4VXABeACQAQCYAZ4BoAGjDqoBBDExLji4AQHIAQD4AQGYAhOgArsOwgIIEAAYgAQYsAPCAgsQABiABBjLARiwA8ICChAAGIAEGIoFGEPCAggQABiABBjLAcICBhAAGBYYHpgDAIgGAZAGApIHBDEwLjmgB6dG&sclient=gws-wiz-serp#fpstate=ive&vld=cid:67624e29,vid:aKgBxSXKJ0c,st:0 урок 9 кл Нерівність Коші-Буняковського

24. https://www.youtube.com/watch?v=0azd3RO6GCU Що більше?
25. https://www.youtube.com/watch?v=uJSSy90HLPA Середні величини. Нерівність Коші
26. https://formula.co.ua/uk/content/mean.html
27. https://elib.lntu.edu.ua/sites/default/files/elib_upload/%D0%95%D0%9D%D0%9F_%D0%AF%D0%BA%D0%B8%D0%BC%D1%87%D1%83%D0%BA_%D0%A1%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BF%D0%B8%D0%BD%D0%B0/page10.html