Лінійні діофантові рівняння з двома невідомими та методи їх розв’язання

ФКНФМ
Будько Сергій 321 група

План:

1. Грецький математик Діофант.
2. Лінійні діофантові рівняння.
3. Методи розв’язування лінійних діофантових рівнянь.

Діофант – грецький математик, який жив і працював в Александрії у III ст. до н.е.

- **Першим увів буквену символіку для перших шести степенів невідомого і вільного члена, знак від’ємного показника степеня.**
- **Шукав розв’язки задач у додатних раціональних числах, а в проміжних обчисленнях користувався і від’ємними числами.**
- **Запропонував і два основні прийоми розв’язування рівнянь – це перенесення невідомого в один бік рівняння і зведення подібних членів.**

Лінійні діофантові рівняння з двома невідомими

Лінійним діофантовим рівнянням із двома невідомими називається рівняння виду $ax + by = c,$ де $a, b, c -$ цілі числа, де $(a, b) = 1.$

Це рівняння має безліч розв'язків, які можна подати у вигляді: $\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$, де $(x_0, y_0) -$ будь-який розв'язок, $t \in Z.$

Теореми про число розв’язків

•Теорема 1. Якщо a і b — взаємно прості числа, то для будь-якого цілого с, рівняння має хоча б один розв'язок у цілих числах.
•Теорема 2. Якщо a і b мають спільний натуральний дільник $d > 1$, а ціле число c не ділиться на d, то рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків в цілих числах.
•Теорема 3. Якщо a і b — взаємно прості числа, то рівняння $ax + by = c$ має нескінченну кількість розв'язків, які знаходять за формулами $x = x_0 - bk,\ y = y_0 + ak,$ де $(x_0; y_0)$ — будь-який цілий розв'язок цього рівняння, k є Z.
Частковий розв'язок $(x_0; y_0)$ для малих a і b можна знайти підбором, а у випадку, коли числа a і b великі, скористувавшись наступною теоремою:
•Теорема 4. НСД(a, b)=d може бути записаний у вигляді
$d = am + bn$ де m, n — цілі числа.

Дослідити чи має дане рівняння розв'язки.

1. $5x-9y=-5$.

Коефіцієнти рівняння $a=5$, $b=-9$, $c=-5$. $НСД(a;b)=НСД(5;-9)=1$.

Рівняння має розв'язки в цілих числах.

2. $8x+12y=13$

Коефіцієнти рівняння: $a=8$, $b=12$, $c=13$. $НСД(a;b)=НСД(8;12)=4>1$.

Рівняння не має розв'язків в цілих числах.

3. $26x+13y=78$.

Коефіцієнти рівняння $a=26$, $b=13$, $c=78$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на 13, отримаємо рівняння

$2x+y=6$. $НСД(2;1)=1$.

При цьому 6 націло ділиться на $НСД(2;1)$, тому це рівняння має розв'язки в цілих числах.

Методи розв’язування лінійних діофантових рівнянь

Діофантові рівняння – це рівняння, які не можна розв’язати стандартними методами. Загальних способів їх розв’язування немає, до кожного типу рівнянь треба підходити творчо, використовуючи пошукові методи.

Методи розв’язування :

1. Метод підбору.
2. Метод підстановки.
3. Метод використання подільності чисел.
4. Метод спуску (або метод розсіювання).
5. Використання алгоритму Евкліда
6. Застосування ланцюгового дробу.

Метод підбору

Приклад 1. Розв’язати в цілих числах рівняння $5x-8y=19$**.**

Розв’язання.

Так як $НСД(5;8)=1$, то рівняння має розв’язки в цілих числах.

$$x=\frac{8y+19}{5}=y+3+\frac{3y+4}{5}$$

Методом підбору знаходимо частковий розв’язок : $y_0=2$, $x_0=7$.

І так, пара чисел (7; 2) – частковий розв’язок даного рівняння, тобто виконується рівність $5\cdot 7-8\cdot 2=19$.

Всі цілі розв’язки рівняння $5x-8y=19$ можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x=7+8t \\ y=2+5t \end{cases}\textbf{, }\textbf{\textit{де}}\ t\in Z\textbf{.}$$

Приклад 2. Розв’язати в цілих числах рівняння *19x+97y=1997*.

Розв’язання

Так як $НСД(19;97)=1$, то рівняння має розв’язки в цілих числах.

Виразимо змінну *x* через *y*.

Маємо, $x=\dfrac{1997-97y}{19}=105-5y+\dfrac{2-2y}{19}$.

Число *x* має бути цілим. Це буде лише при $y_0=1$. Тоді $x_0=100$.

Тому всі розв’язки даного рівняння можна задати формулами

$\begin{cases} x=100-97t \\ y=1+19t \end{cases}$, де $t\in Z$.

Відповідь: $\begin{cases} x=100-97t \\ y=1+19t \end{cases}$, де $t\in Z$.

Приклад 3. Знайти двозначне число, яке дорівнює подвоєному добутку його цифр.

Розв’язання

Позначимо шукане двозначне число через $\overline{xy}$ (риска над значенням числа, що записане за допомогою цифр x та y, ставиться для того, щоб відрізнити цей запис від запису добутку xy). Так як число $\overline{xy}$ містить x десятків і y одиниць, то: $\overline{xy} = 10x + y$.

За умовою задачі : $\overline{xy} = 2xy$ або $10x + y = 2xy$.

Звідки $x = \dfrac{y}{2(y-5)}$.

Враховуючи, що x та y – цифри $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$, шуканий результат можна отримати за допомогою повного перебору усіх можливих значень y, тобто у останню рівність треба просто послідовно підставити замість y значення $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Виконавши підстанови, впевнюємося, що лише одне значення $y = 6$ задовольняє рівність. В цьому випадку $x = 3$, тобто:

$$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$$

$$36 = 36.$$

Відповідь : шукане число 36.

Метод підстановки

Виражаємо x через y, або y через x.

Надаємо значення $y = 0;1;2;3;...$, де 0; 1; 2; 3; … остачі від ділення і одержуємо значення x. Нехай $\begin{cases} y_0 = n \\ x_0 = m \end{cases}$.

Даний спосіб базується на теоремі: якщо *НСД(a,b)=1,* то серед чисел $0,1,2,...,(c-1)$ завжди знайдеться одне число y, при якому вираз $(c-by)$ буде кратний a.

Приклад. Розв'язати в цілих числах рівняння $5x-8y=19$.

Розв'язання

Так як $НСД(5;8)=1$, то рівняння має розв'язки в цілих числах.

Розв'яжемо рівняння відносно того з невідомих , при якому найменший (по модулю) коефіцієнт, тобто відносно *x.*

Виразимо *x* через *y*. Маємо, $x = \dfrac{8y+19}{5}$.

При діленні на 5 можна отримати остачі 0, 1, 2, 3, 4.

Підставимо ці числа замість y.

Отримаємо:

якщо $y = 0$, то $x = \frac{8 \cdot 0 + 19}{5} = \frac{19}{5}$;

якщо $y = 1$, то $x = \frac{8 \cdot 1 + 19}{5} = \frac{27}{5}$;

якщо $y = 2$, то $x = \frac{8 \cdot 2 + 19}{5} = \frac{35}{5} = 7$;

якщо $y = 3$, то $x = \frac{8 \cdot 3 + 19}{5} = \frac{43}{5}$;

якщо $y = 4$, то $x = \frac{8 \cdot 4 + 19}{5} = \frac{51}{5}$.

Таким чином, частковим розв’язком рівняння є пара чисел $(7;2)$.

Отже, загальний розв’язок рівняння $5x - 8y = 19$ в цілих числах має вигляд

$$\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 2 + 5t \end{cases}, \text{ де } t \in Z.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$, де $t \in Z$.

Метод використання подільності чисел

При розв’язуванні діофантових рівнянь даний метод полягає у наступному: треба рівняння представити у такому вигляді, щоб можна було легко оцінити вираз, використовуючи властивості подільності чисел, і вже потім конкретно перебирати декілька значень.

Приклад 1: Хлопці збирали гриби. Один з них знайшов 6 грибів, а інші по 13 грибів кожний. На наступний день кількість хлопців була іншою, один з них знайшов 5 грибів, а інші по 10 грибів кожний. Скільки хлопчиків збирали гриби у перший і другий день, якщо кількість зібраних грибів у обох була однакова? Відомо, що це ціле число більше за 100 і менше за 200.

Розв'язання

Для розв'язання цієї задачі достатньо введення двох невідомих.

Нехай у перший день збирали гриби x хлопців, а у другий – y хлопців.

Тоді за умовою задачі отримуємо рівняння:

$$6+13(x-1)=5+10(y-1)$$

Виразимо одне невідоме через інше (у даному випадку зручніше виразити y через x, так як коефіцієнт біля y дорівнює 10, а подільність на 10 легко перевірити):

$$y=\frac{13x-2}{10}.$$

Легко бачити, що для подільності на 10 число $13x-2$ повинно закінчуватися цифрою 0, але тоді число $13x$ повинно закінчуватися цифрою 2. Так як останню цифра добутку одержуємо, коли множимо останні цифри множників,значить, число x повинно закінчуватись цифрою 4, тобто число x може бути рівним 4; 14; 24; ...

Але з умови задачі відомо, що кількість грибів, зібраних у перший день, більша, ніж 100 і менша, ніж 200.

Підставляємо у вираз $6+13(x-1)$ виділені значення x, бачимо, що цій умові задовольняє лише $x=14$. Тоді $y=\frac{13x-2}{10}=18$.

Відповідь : у перший день збирали гриби 14 хлопців, а на другий 18 хлопців.

Приклад 2: Сторони прямокутника виражаються цілими числами. Якої довжини повинні вони бути, щоб периметр прямокутника чисельно дорівнює його площі?

Розв'язання

Позначимо сторони прямокутника через x та y, складаємо рівняння:

$$2x + 2y = xy$$

Звідси випливає : $x = \dfrac{2y}{y-2}$.

Так як x і y мають бути додатними, то додатним повинно бути і число $y-2$, тобто $y > 2$.

Перетворимо вираз так : $x = \dfrac{2y}{y-2} = \dfrac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \dfrac{4}{y-2}$

Так як x повинно бути цілим числом, то вираз $\dfrac{4}{y-2}$ повинен бути цілим.

Але при $y > 2$ це можливо лише, якщо $y = 3;4;6$. Відповідними значеннями x будуть $6;4;3$.

Відповідь : прямокутник зі сторонами 3 та 6, або квадрат із стороною 4.

Метод спуску або розсіювання

Метод спуску (або метод розсіювання) при розв'язуванні невизначених (діофантових) рівнянь першого степеня з цілими коефіцієнтами вивчали ще в Стародавній Індії. Цим способом користуються і в наш час .

Нехай дано рівняння $ax+by=c,$ де a,b,c – цілі числа, де $(a,b)=1.$

Оскільки коефіцієнти при x та при y є взаємно прості числа, то один з них завжди більший за інший. Тоді:
1) виражаємо невідоме з меншим коефіцієнтом через невідоме з більшим коефіцієнтом і виділяємо цілі частини отриманих дробів;
2) поставимо вимогу, щоб дробова частина була довільним цілим числом і отримуємо, нове діофантове рівняння уже з меншими коефіцієнтами, яке далі можна перетворювати за тими ж правилами.
Загальний розв'язок отримаємо після підстановки всіх отриманих виразів у попередні.

Приклад. Розв`язати в цілих числах рівняння $5x-8y=19$.

Розв’язання

Виразимо змінну, яка має найменший коефіцієнт, через іншу змінну: $x=\frac{8y+19}{5}$,

Виділимо цілу частину: $x=y+3+\frac{3y+4}{5}$.

Цілим x буде при умові, якщо $\frac{3y+4}{5}$ матиме ціле значення, тобто якщо число $3y+4$ без остачі поділиться на 5.

Позначимо $\frac{3y+4}{5}=z$.

Отримаємо рівняння $3y+4=5z$.

Прийшли до рівняння такого ж типу як і вихідне рівняння, але вже з меншими коефіцієнтами. Розв’яжемо його відносно змінних y і z.

Виконуючи аналогічні дії отримуємо:

$$y=\frac{5z-4}{3}=z-1+\frac{2z-1}{3}.$$

Позначимо $\frac{2z-1}{3}=k$. Отримуємо $2z-1=3k$.

Розв`яжемо рівняння відносно змінних z і k

Звідси $z=\frac{3k+1}{2}=k+1+\frac{k-1}{2}$.

Позначимо $\frac{k-1}{2}=t$. Маємо $k=2t+1$

Дробів більше нема. Отже, спуск закінчено.

Тепер необхідно «піднятися нагору», тобто поступово повернутись до y і x. Маємо

$$z = \frac{3(2t+1)+1}{2} = \frac{6t+4}{2} = 3t+2\,;$$

$$y = \frac{5(3t+2)-4}{3} = \frac{15t+6}{3} = 5t+2\,;$$

$$x = \frac{8(5t+2)+19}{5} = \frac{40t+35}{5} = 8t+7$$

Отже, загальний розв’язок рівняння $5x-8y=19$ в цілих числах має вигляд

$$\begin{cases} x = 7+8t \\ y = 2+5t \end{cases}, \text{ де } t \in Z\,.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 7+8t \\ y = 2+5t \end{cases}$, де $t \in Z$.

Застосуванням алгоритму Евкліда

Можна знайти найбільший дільник натуральних чисел *a* і *b*, не розкладаючи ці числа на прості множники, застосовуючи процес ділення з остачею. Для цього необхідно розділити більше з цих чисел на менше, потім менше з чисел на остачу при першому діленні і продовжувати цей процес до тих пір, поки не отримаємо ділення без остачі. Остання відмінна від нуля остача і є шуканим НСД(*a,b*).

Приклад . Розв’язати в цілих числах рівняння $5x-8y=19$.

Розв'язання

Для розв’язання цього рівняння застосуємо алгоритм Евкліда. $НСД(a,b)=НСД(5,8)=1$.

Так як $НСД(5;8)=1$, то одиницю можна подати у вигляді суми $5m-8n=1$.

Скористаємось алгоритмом Евклівда.

$8=5\cdot1+3$ (або $3=8-5\cdot1$)

$5=3\cdot1+2$ (або $2=5-3\cdot1$)

$3=2\cdot1+1$ (або $1=3-2\cdot1$)

Звідси

$$1=3-2\cdot1=3-(5-3\cdot1)\cdot1=3-5\cdot1+3\cdot1=3\cdot2-5\cdot1=(8-5\cdot1)\cdot2-5\cdot1=$$
$$=8\cdot2-5\cdot2-5\cdot1=5\cdot(-3)-8\cdot(-2)$$

Маємо, $m=-3$, $n=-2$.

Таким чином, розв'язком рівняння $5m-8n=1$ є пара чисел $(-3;-2)$.

Знаходимо частковий розв'язок рівняння $x_0=19\cdot(-3)=-57$, $y_0=19\cdot(-2)=-38$.

Пара чисел $(-57;-38)$ ***– є частковим розв'язком даного рівняння.***

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$\begin{cases} x = -57 + 8t \\ y = -38 + 5t \end{cases}, \text{ де } t \in Z.$$

t – довільне ціле число, яке пробігає всю множину цілих чисел, замість нього можна взяти $t+8$. Тоді отримаємо більш компактний запис загального розв'язку

$$\begin{cases} x = -57 + 8(t+8) = -57 + 8t + 64 = 7 + 8t \\ y = -38 + 5(t+8) = -38 + 5t + 40 = 2 + 5t \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 2 + 5t \end{cases}, \text{ де } t \in Z.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$, де $t \in Z$.

Найчастіше алгоритм Евкліда використовують, якщо рівняння має великі числа, коли шляхом підбору певних розв'язків знайти неможливо.

Використання ланцюгових дробів

Загальний розв'язок в цілих числах рівняння $ax+by=c$, *де* a,b,c - цілі числа відмінні від *0 і* $НСД(a;b)=1$, можна подати у вигляді $x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt$, $y=(-1)^{n}cP_{n-1}-at$, *де* $t\in Z$, *а* P_{n-1} *і* Q_{n-1} – чисельник і знаменник передостаннього наближеного дробу розкладу числа $\frac{a}{b}$ у ланцюговий дріб, n – порядок.

Приклад. Розв'язати в цілих числах рівняння $5x-8y=19$.

Подамо дане рівняння у вигляді $5x+8(-y)=19$.

З коефіцієнтів рівняння утворимо дріб і запишемо його у вигляді ланцюгового дробу.

$$\frac{5}{8}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

Відкинемо останню ланку цього ланцюгового дробу та перетворимо отриманий наближений ланцюговий дріб у звичайний

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

$n=4$.

За формулами $x=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+bt$, $y=(-1)^{n}cP_{n}-at$, можна знайти загальний розв'язок рівняння

$$x=(-1)^{3}\cdot 19\cdot 3+8t=-57+8t,$$

$$-y=(-1)^{4}\cdot 19\cdot 2-5t=38-5t$$

або $y=-38+5t$, де $t\in Z$.

Відповідь: $\begin{cases} x=-57+8t \\ y=-38+5t \end{cases}$***, де*** $t\in Z$.

Загальний розв'язок рівняння $ax+by=c$ можна знайти ще таким чином.

1) Знаходимо передостанній підхідний дріб $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

2) Знаходимо різницю: $\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n}{Q_n\cdot Q_{n-1}}=\frac{1}{Q_n\cdot Q_{n-1}}$, $P_n\cdot Q_{n-1}-P_{n-1}\cdot Q_n=1$

3) Помножимо ліву і праву частини рівності на *c*: $P_n\cdot Q_{n-1}\cdot c-P_{n-1}\cdot Q_n\cdot c=c$.

4) Порівнюємо одержану рівність з рівнянням $ax+by=c$ і визначаємо x_0, y_0.

Знайдемо різницю $\frac{5}{8}-\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3-8\cdot 2}{8\cdot 3}=\frac{-1}{8\cdot 3}$.

Отже, $5\cdot 3-8\cdot 2=-1$ або $5\cdot(-3)-8\cdot(-2)=1$

Отримали рівність, де в лівій частині стоїть вираз подібний на ліву частину даного рівняння, але в правій замість 19 стоїть 1. Помножимо обидві частини цієї рівності на 19.

Маємо, $5\cdot(-57)-8\cdot(-38)=19$. А це означає, що пара чисел $(-57;-38)$ є частковим розв'язком даного рівняння.

Значить, загальний розв'язок $\begin{cases} x=-57+8t \\ y=-38+5t \end{cases}$, де $t\in Z$.

Оскільки тут t – довільне ціле число, яке пробігає всю множину цілих чисел, замість нього можна взяти $t+8$. Тоді отримаємо більш компактний запис загального розв'язку

$$\begin{cases} x=-57+8(t+8)=-57+8t+64=7+8t \\ y=-38+5(t+8)=-38+5t+40=2+5t \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=7+8t \\ y=2+5t \end{cases}, \text{ де } t\in Z.$$

Відповідь: $\begin{cases} x=7+8t \\ y=2+5t \end{cases}$, де $t\in Z$.

Використані джерела:

1. Діофантові рівняння. *Освітній проект «На Урок» для вчителів*. URL: https://naurok.com.ua/diofantovi-rivnyannya-94507.html .

2. Діофантові рівняння. Розв'язування рівнянь в цілих числах. *Освітній проект «На Урок» для вчителів*. URL: https://naurok.com.ua/diofantovi-rivnyannya-rozv-yazuvannya-rivnyan-v-cilih-chislah-341430.html .

3. Учасники проектів Вікімедіа. Діофант Александрійський – Вікіпедія. *Вікіпедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Діофант_Александрійський.

4. Учасники проектів Вікімедіа. Діофантові рівняння – Вікіпедія. *Вікіпедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Діофантові_рівняння.