РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Ідея застосування методів перетворення до розв'язування задач на побудову така: якщо властивості шуканих елементів фігури, яку потрібно побудувати, неможливо знайти при безпосередньому вивченні малюнка (ескізу), то перетворюють геометрично або всю фігуру, зображену на малюнку (ескізі), або її елементи. Після цього легше виявити властивості шуканих елементів фігури і знайти спосіб побудови.

При розв’язуванні задач на побудову використовують такі методи геометричних перетворень: метод паралельного перенесення, метод повороту, метод осьової симетрії, метод інверсії, метод подібності.

Розглянемо детальніше суть даних методів

Застосування центральної симетрії

Нагадаємо деякі означення і властивості.

1. Точки A і A_1 називаються **симетричними** відносно точки O, якщо O – середина відрізка AA_1.

2. Перетворення фігури, коли кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої точки O, називаються **центральною симетрією** з центром O.

3. Центральна симетрія є рухом. Отже, симетричні фігури рівні.

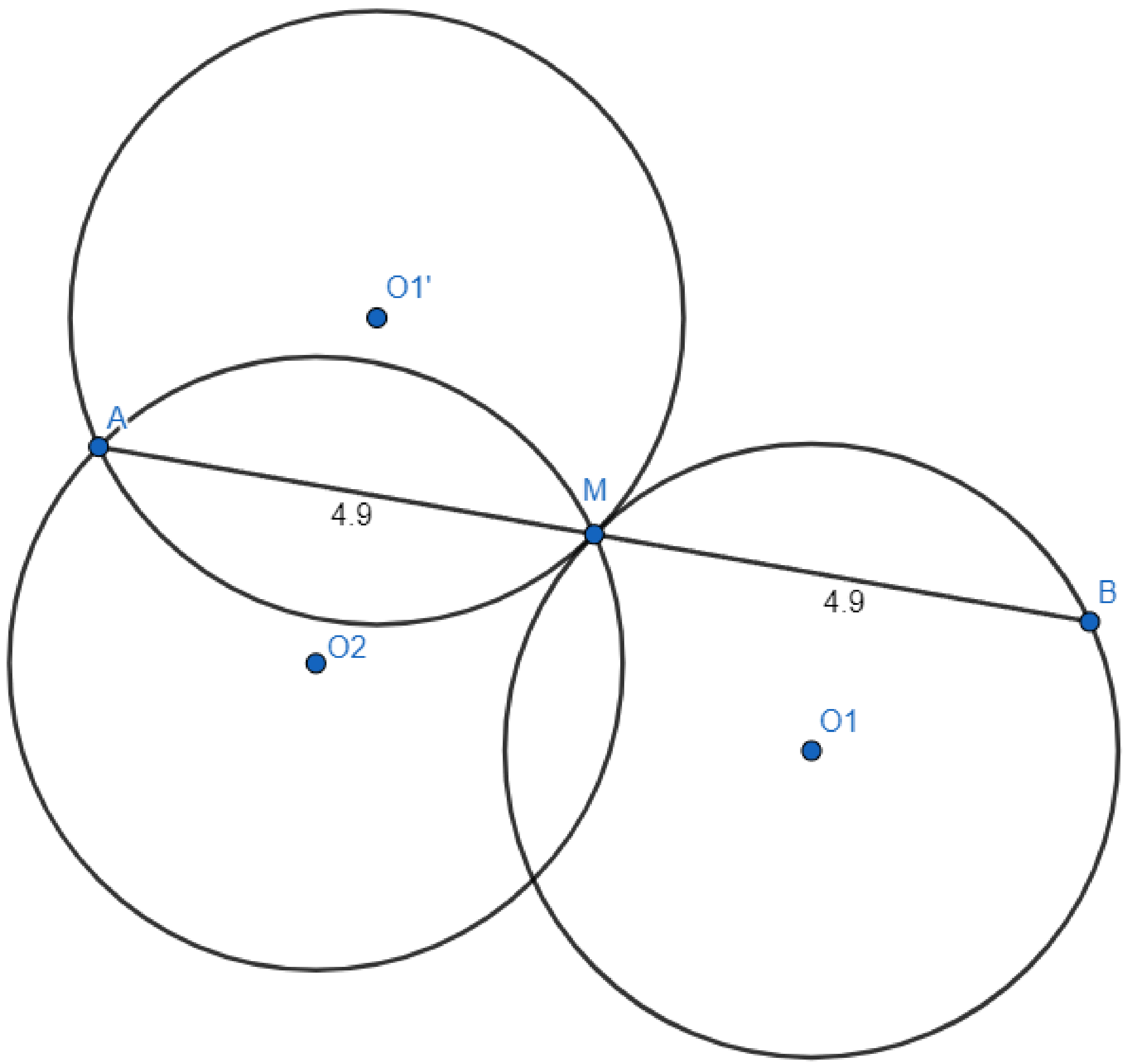
4. Обмежена фігура не може мати більше одного центра симетрії.

Задача 1. Два кола перетинаються в точці М. Провести через пряму М провести пряму, яка перетинає коло в точках А і В так, що АМ = АВ

Розв'язання

Зауважимо, що при симетрії кола з центром О1 відносно точки М точка В переходить у точку А. Отже, точку А можна отримати в перетині кіл з Центрами О2 і О1'.В - точка перетину кола О1 і прямої МА.

Посилання на GeoGebra:
https://www.geogebra.org/m/eqdcepht



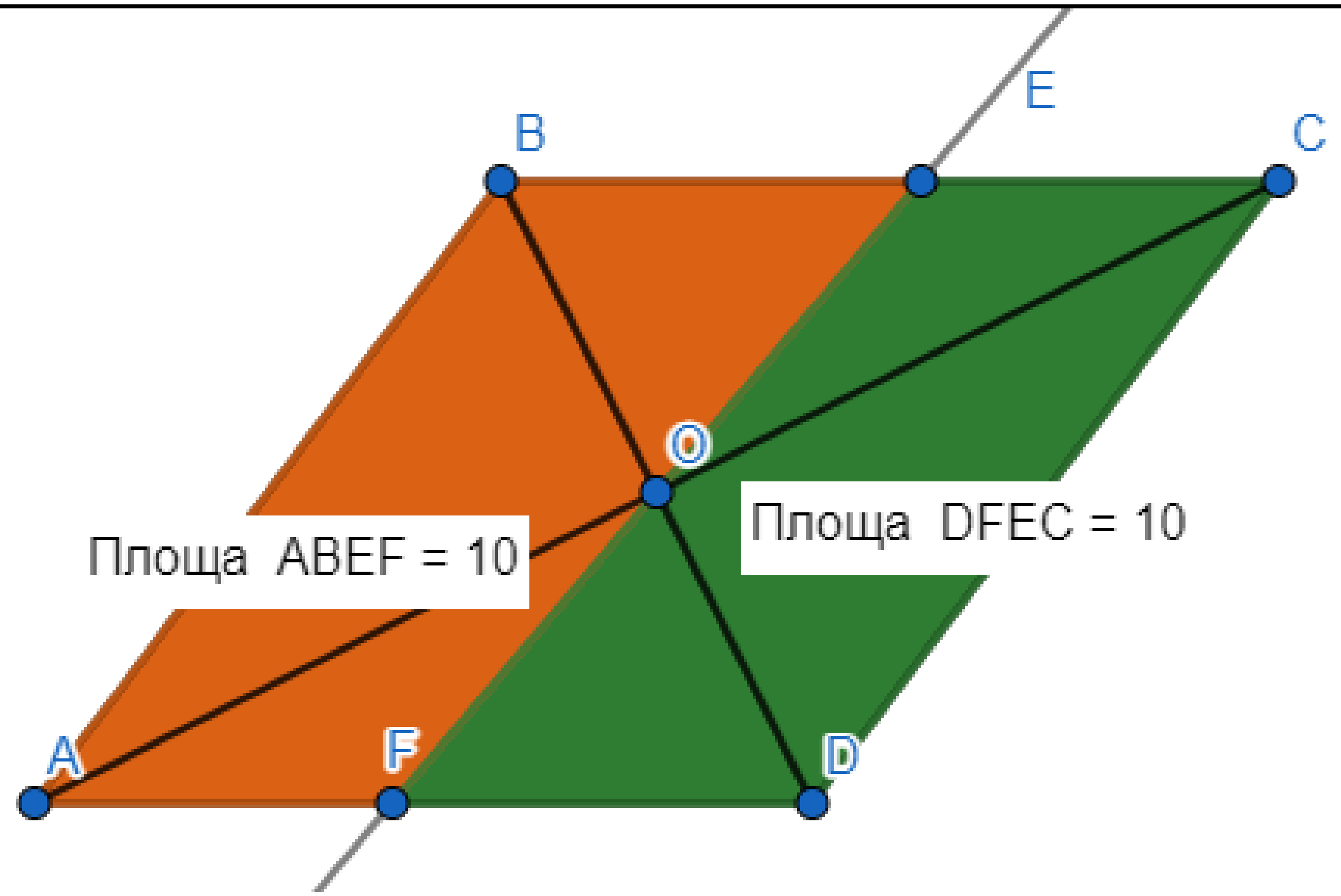
Задача 2. Знайдіть точку через яку можна провести пряму так, щоб вона поділила площу даного паралелограма навпіл

Розв’язання

Цієї точкою буде центр симетрії.

Посилання на GeoGebra:

https://www.geogebra.org/m/eqdcepht



Застосування осьової симетрії

1. Точки A і A' називають **симетричними** відносно прямої l, якщо пряма l перпендикулярна відрізку AA' і проходить через його середину.

2. Перетворення фігури, завдяки якому кожній точці цієї фігури відповідає точка, симетрична їй відносно заданої прямої l, називається **осьовою симетрією** з віссю l.

3. Осьова симетрія є рухом, отже, симетричні фігури рівні.

Задача 3. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90°)$ медіана $AM = m$ проведена до меншого катета й утворює з більшим кут $15°$. Знайти площу трикутника.

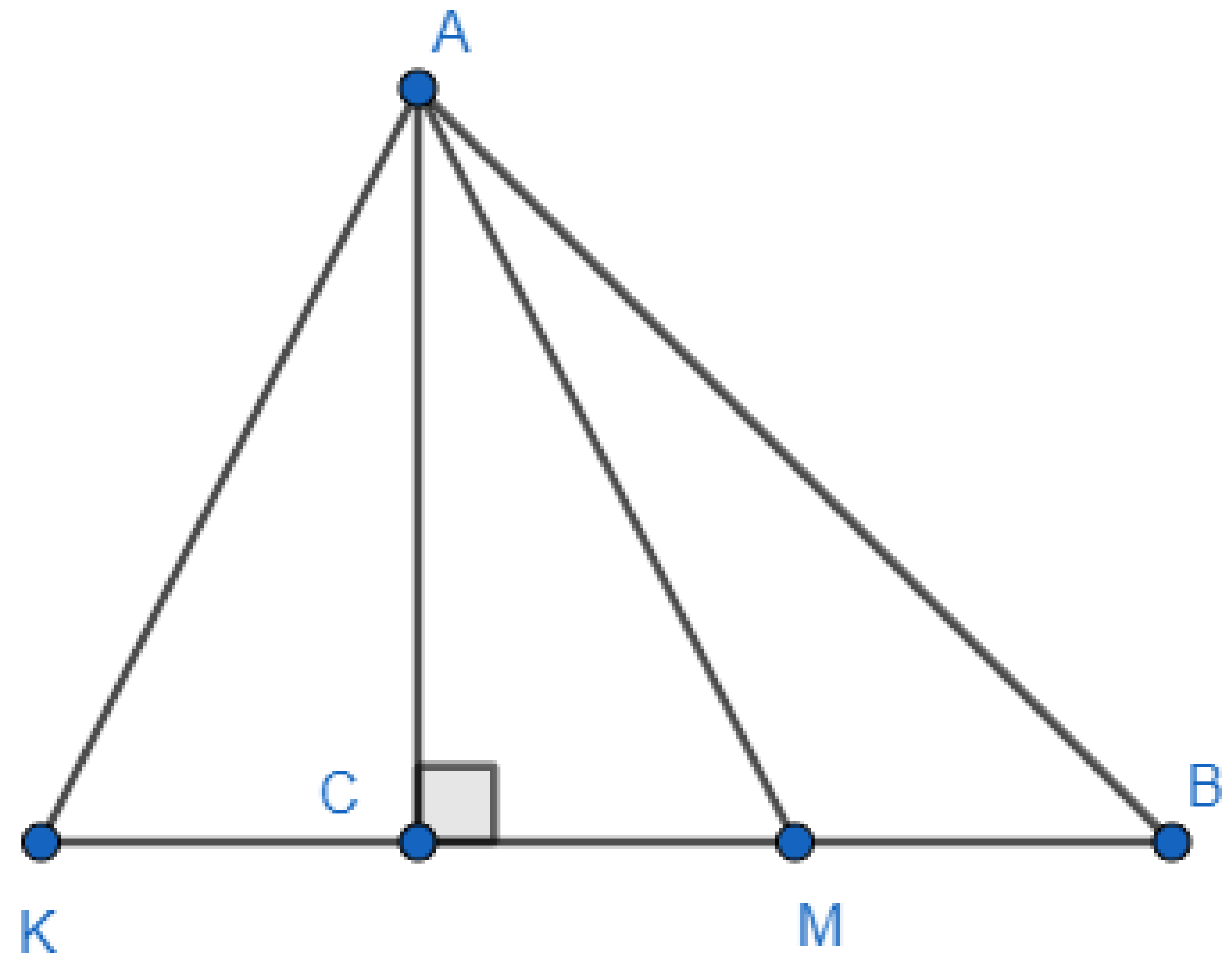
Розв’язання

Побудуємо точку K, симетричну точці M відносно прямої AC

Тоді $\Delta KAC = \Delta MAC$ і $S_{KAC} = S_{MAC}$.

Маємо

$$S_{ABC} = 2S_{AMC} = S_{KAM} = \frac{1}{2}m^2 \sin 30° = \frac{m^2}{4}.$$



Застосування перетворення повороту

1. Перетворення фігури F на фігуру F^1, коли кожна точка X фігури F переноситься в таку точку X' фігури F^1, що $X'O = XO$ і $\angle X'OX = \alpha$, де O – задана точка і α – даний кут, $0 < \alpha < \pi$, називають **перетворенням повороту фігури** F навколо точки O на кут α.

2. Якщо точка X' – образ точки X при повороті навколо точки O на кут α, то цей факт будемо записувати так: $R_O^\alpha(X) = X'$.

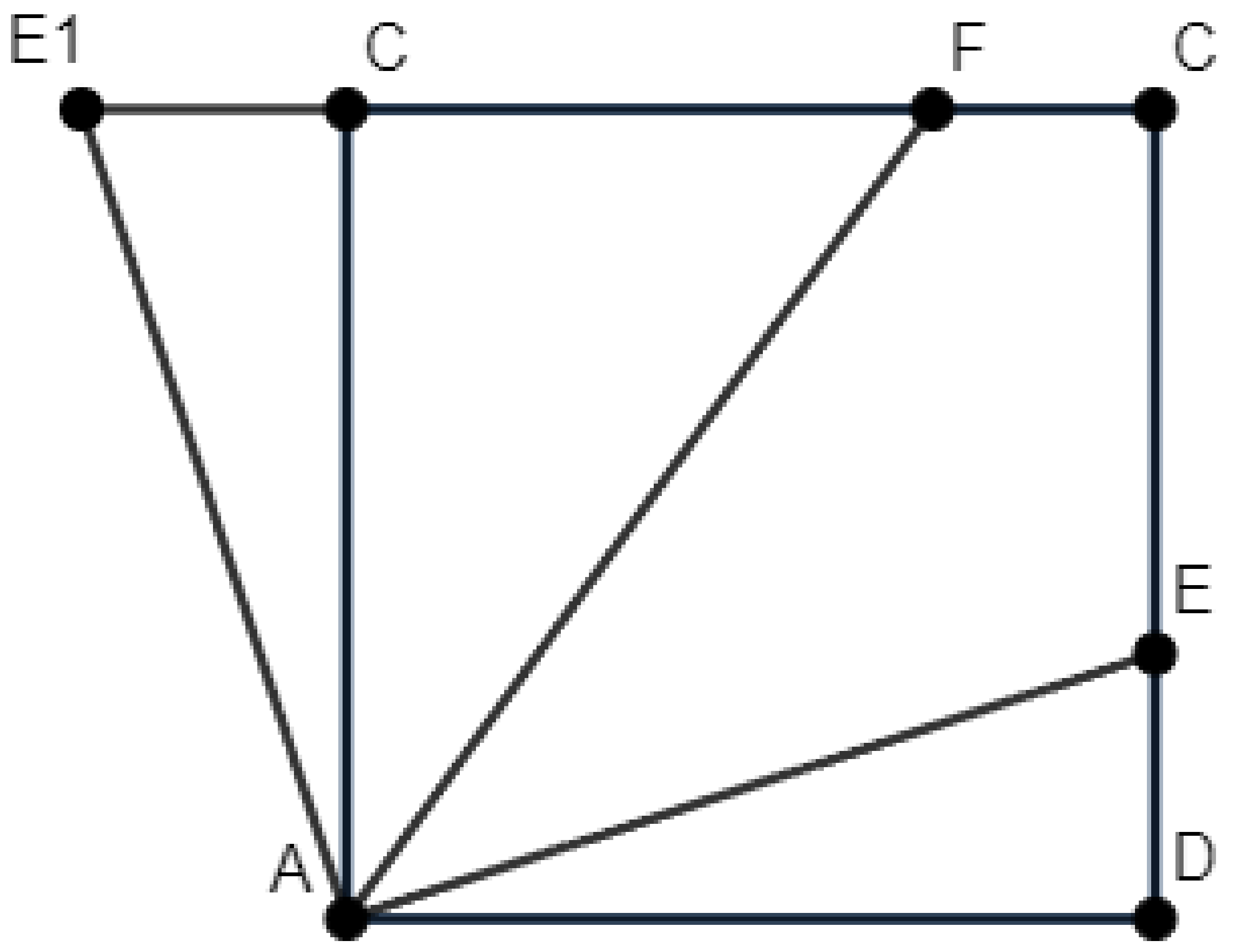
3. Перетворення повороту є рух.

На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC в точці F. Довести, що $AE = ED + BF$.

Розв’язання

Розглянемо поворот із центром A на кут 90°. Тоді $R_A^{90^\circ}(D) = B$, $R_A^{90^\circ}(E) = E_1$, причому E_1 лежить на BC Тоді $DE = BE_1$

(нагадуємо, що поворот є рух, отже, переводить фігуру в рівну їй). Маємо: $E_1F = E_1B + BF = DE + BF$. Оскільки $\angle E_1AB = \angle EAD$, то $\angle E_1AF = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle BFA$, отже, $\angle E_1AF = \angle E_1FA$. Звідси $AE_1 = E_1F = DE + BF$.



Застосування гомотетії

1. **Гомотетія** з центром O і коефіцієнтом k (який відрізняється від нуля) – це перетворення, коли кожній точці X ставиться у відповідність така точка X', що $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$.

2. Гомотетія відрізок переводить у відрізок.

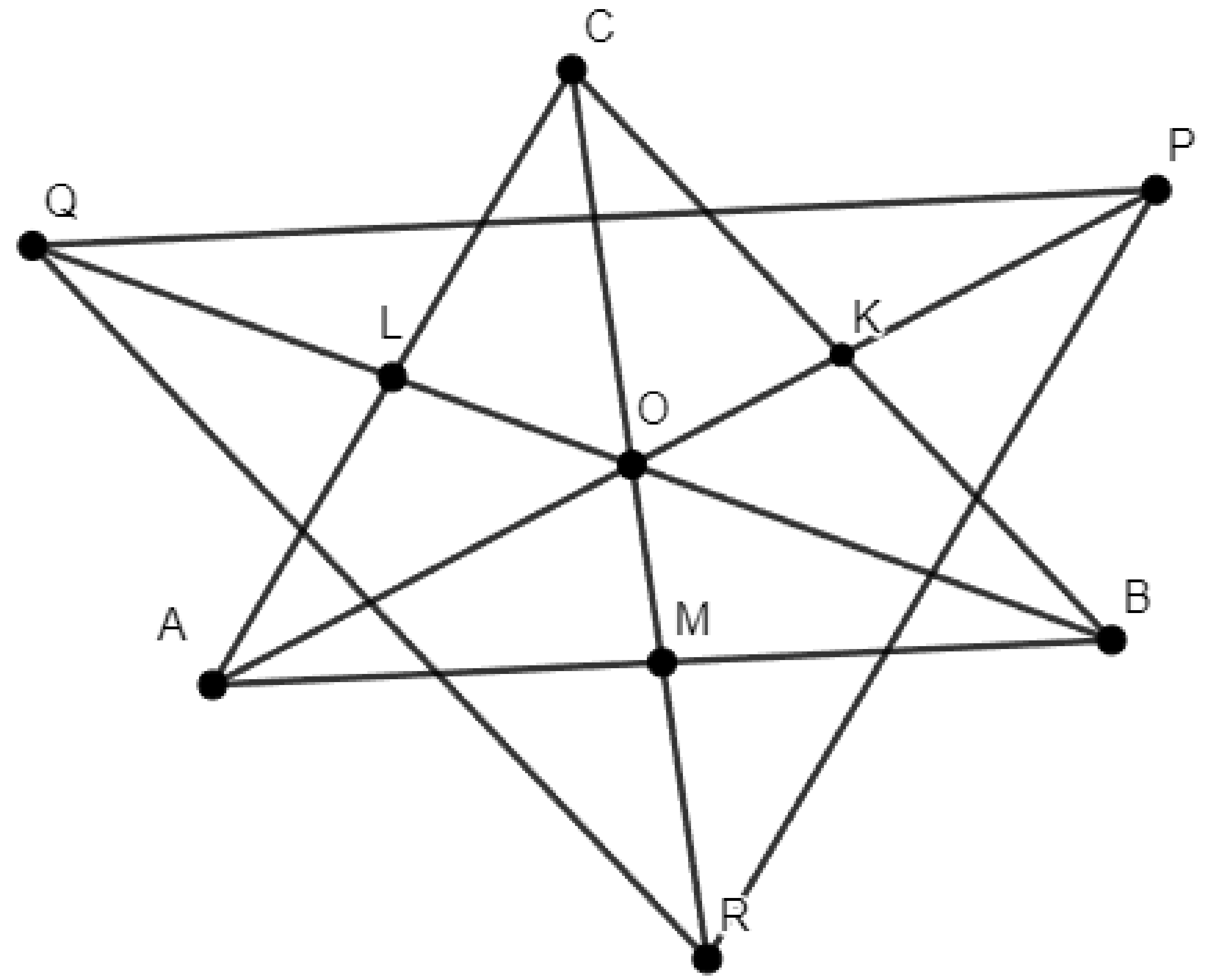
3. Гомотетія зберігає величину кута.

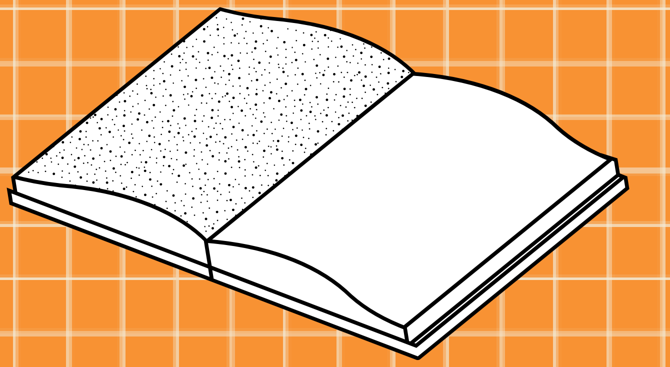
4. При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.

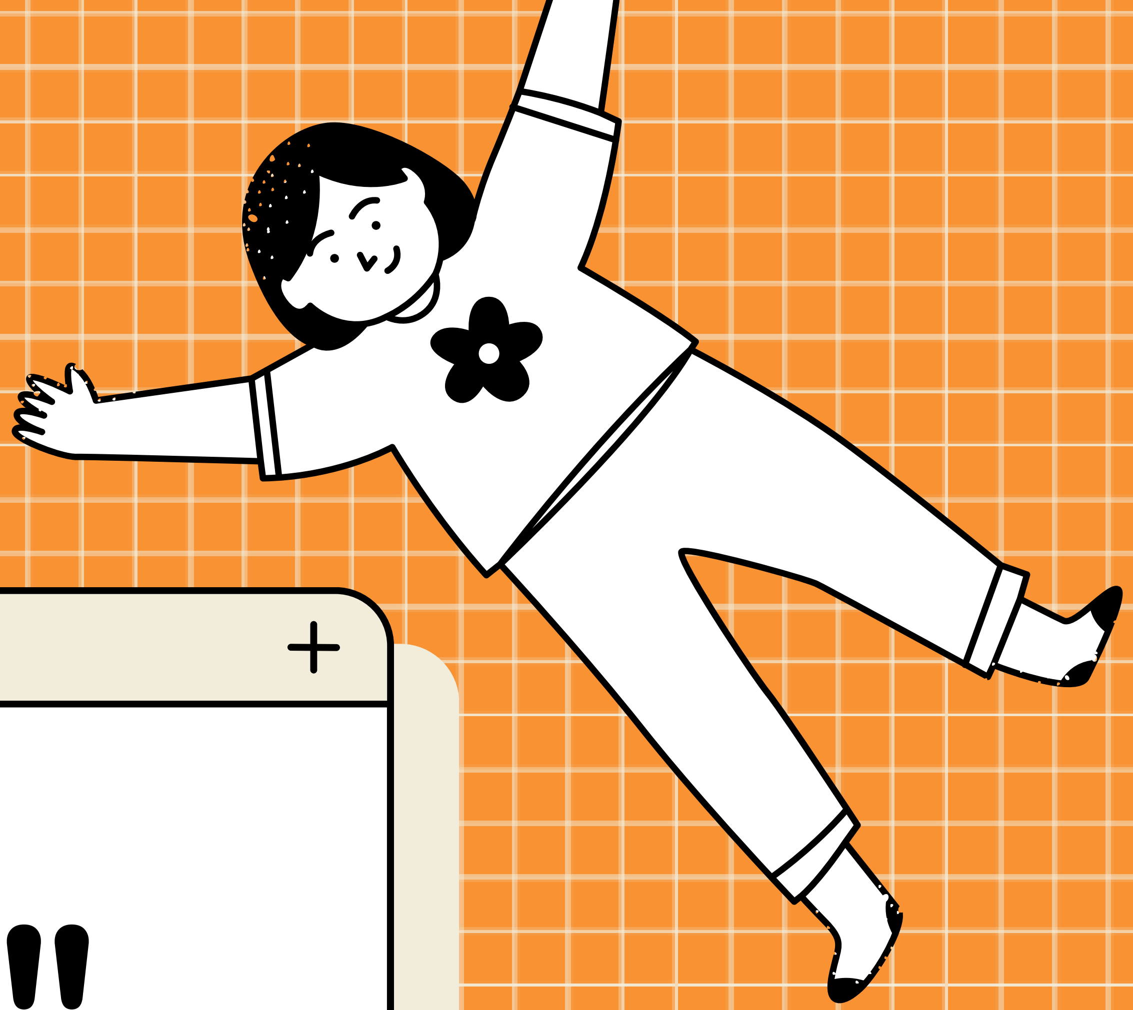
На продовженнях медіан AK, BL і CM трикутника ABC взято точки P, Q, R так, що $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Знайти S_{PQR}, якщо $S_{ABC} = 1$.

Розв'язання

Зауважимо, що $\frac{OP}{AO} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC} = \frac{5}{4}$ Це означає, що трикутник PQR гомотетичний трикутнику ABC з коефіцієнтом гомотетії $k = -\frac{5}{4}$. Тоді $S_{PQR} = \frac{25}{16}$, $S_{ABC} = \frac{25}{16}$.







ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!!