**ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОГАРИФНІЧНИХ ВИРАЗІВ. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ**

**ПЛАН**

[Тотожні перетворення логарифмічних виразів 3](#_Toc38631241)

[Задачі для самостійного опрацювання 7](#_Toc38631242)

[Логарифмічні рівняння 9](#_Toc38631243)

[Задачі для самостійного опрацювання 17](#_Toc38631244)

[Логарифмічні нерівності 19](#_Toc38631245)

[Задачі для самостійного опрацювання 27](#_Toc38631246)

[Список використаних джерел 29](#_Toc38631247)

# **Тотожні перетворення логарифмічних виразів**

Основні відомості про логарифм

Нехай – додатне, відмінне від 1 число. Числоназивається логарифмом числа за основою , якщо .

Наприклад:

 , оскільки ;

 , оскільки .

Тож, .

З означення логарифма маємо , що , по-перше, записи та висловлюють одну і ту саму залежність між числами ; по-друге, число повинно бути додатнім; по-трете, якщо , то

. (1)

Тотожність (1) є математичним записом означення логарифма; її також називають основною логарифмічною тотожністю.

Для будь-якого додатного числа та будь-якого додатного, відмінного від 1 числа існує тільки одне дійсне число таке, що . Звідси, зокрема, слідує , що якщо , то , де .

Основні властивості логарифму:

Якщо , то

1. .
2. .

Якщо, зокрема , то ми отримуємо:

1. Якщо , то ; якщо , то .
2. Якщо , то .

Цю тотожність прийнято називати формулою переходу до нової основи. З нього, зокрема, при слідує, що .

1. Якщо , то .

Роздивимося приклади.

Приклад 1. Обчислимо

Розв’язання. Використавши те, що і що при піднесені степеня до степеня показник перемножаються, отримуємо:

Показник степеня можна перетворити наступним чином:

Отже, . Але з тотожності (1) випливає, що. Таким чином, .

Приклад 2. Обчислимо , якщо .

Розв’язання. Маємо .Виразимо тепер число 5 через числа 10 і 2 ( тобто через дану основу і число , логарифм якого відомий).використовуючи операцію множення, ділення і піднесення до степеня. Так як , то .

Приклад 3. Обчислимо , якщо .

Розв’язання. 1-й спосіб. Як і у минулому прикладі, спростимо :

Тож, нам потрібно обчислити , якщо ми знаємо, що . Виразимо число 2 через число 3 і 12 ( дана основа і число, логарифм якого відомий), користуючись операціями множення, ділення та піднесення до степеня.

Маємо: , але тоді

Таким чином , .

2й-спосіб. Маємо: . Введемо позначення , тоді .

Далі, .

Але за умовою ,отже, , звідки .

Таким чином , .

Приклад 4. Визначити , якщо.

Розв’язання. Використавши формули та , маємо:

Введемо позначення , тоді . Маємо наступне:

Оскільки за умовою , то задача зводиться до розв’язання рівняння , звідси знаходимо.

Таким чином , .

Приклад5. Обчислити , якщо

Розв’язання.

Введемо позначення:. Тоді

Маємо:

Таким чином, задача зводиться до розв’язання наступної системи рівнянь:

З цієї системи маємо:

Тоді

## **Задачі для самостійного опрацювання**

Знайдіть значення виразів:

1. .

Відповідь: 0.

Відповідь:

Відповідь:24.

1. .

Відповідь:0.

1. .

Відповідь:.

Відповідь:0.

Відповідь:3,0970.

Відповідь:

Відповідь:

Відповідь:

1. , якщо , де - додатні, відмінні від 1 числа.

Відповідь:1

Доведіть тотожність:

1. .
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .

Спростіть вирази:

1. .

Відповідь:.

1. .

Відповідь:.

**Логарифмічні рівняння**

Під час розв’язування логарифмічних рівнянь користуються двома основними методами: 1) перехід від рівняння Да рівняння ; 2) введення нових змінних. Іноді доводиться використовувати штучні методи.

1. Логарифмічні рівняння. Розглянемо логарифмічне рівняння виду

(1)

де і .

Розв’язання таких рівнянь спирається на наступну теорему.

Теорема1. Рівняння Рівносильне симетричній системі:

(2)

Зауважимо, що для розв’язування рівняння (1) зовсім не обов’язково розв’язувати систему (2). Можна поступити по іншому: розв’язати рівняння

(3)

та з його розв’язків відібрати ті, які задовольняють системі нерівностей

(4)

тобто які належать області визначення рівняння (1).

При розв’язувані логарифмічних рівнянь використовуються різні властивості логарифмів. Розглянемо на прикладі рівняння

(5)

Воно перетворюється до виду:

(6)

Але рівняння (5) та (6) можуть бути нерівносильними. Насправді, область визначення виразу задається системою нерівностей

тоді як область визначення виразу задається нерівністю , яке, в свою чергу, рівносильне сукупності систем нерівностей:

Таким чином, при переході від рівняння (5) до рівняння (6) може відбутися розширення області визначення рівняння (5) ( за рахунок розширення останньої системи нерівностей, це означає, що можуть з’явилися сторонні корені. Тому, розв’язавши рівняння (6), потрібно зі знайдених його коренів відібрати ті, які належать області визначення початкового рівняння (5), тобто задовольняють системі нерівностей . Ця перевірка є невід’ємною частиною розв’язання логарифмічного рівняння.

Зрозуміло, перевірку можна робити і за допомогою безпосередньої підстановки знайдених розв’язків у початкове рівняння.

Розглянемо рівняння виду

(7)

Їх розв’язання основане безпосередньо на наступній теоремі.

Теорема2. Рівняння (7) рівносильне змішаній системі:

Іншими словами, коренями рівняння (7) є ті і тільки ті корені рівняння , які одночасно задовольняють наступним умова:

(цією умовою задається область визначення рівняння(7)).

Приклад. Розв’язати рівняння

(8)

Розв’язання. За теоремою 1 рівняння (8) рівносильне наступній змішаній системі:

(9)

Розв’язавши рівняння цієї системи, тримаємо: .З цих двох значень обом нерівностей системи (9) задовольняє лише ( тобто значення не належить області визначення рівняння (8).

Тому розв’язком рівняння (8) є

Приклад 2. Розв’яжемо рівняння

(10)

Розв’язання. Перетворимо рівняння (10) до виду

а далі

(11)

З рівняння (11) знаходимо:.

Область визначення рівняння (10) задається системою нерівностей:

(12)

Підставивши по черзі знайдені корені рівняння (11) у систему (12), переконуємося, що задовольняє цю систему , а не задовольняє. Таким чином, є єдиним коренем рівняння (10).

Приклад 3. Розв’яжемо рівняння

(13)

Розв’язання. Насамперед перейдемо у рівнянні (13) до логарифмів з однаковими основами. Так як , то рівняння (13) перетвориться до виду

Далі маємо ,

(14)

Розв’язавши рівняння (14), знаходимо

Залишилося зі знайдених значень відібрати ті, які задовольняють системі нерівностей

Розв’язавши цю систему, знаходимо, що . Зі знайдених значень лише задовольняє нерівності . Це означає, що - єдиний корінь рівняння (13).

Приклад 4. Розв’яжемо рівняння

(15)

Розв’язання: За теоремою 2 це рівняння рівносильне системі

(16)

Розв’язавши рівняння , що входить до системи (16), отримуємо: . Із цих двох значень усім іншим умовам системи (16) задовольняє лише .Таким чином, - корінь рівняння (15).

Приклад 5. Розв’яжемо рівняння .

Розв’язання. Так як , то задане рівняння можна переписати наступним чином:

Поклавши , отримаємо рівняння

звідки знаходимо . З рівняння знаходимо . Це і є єдиний корінь заданого рівняння.

Приклад 6. Розв’яжемо рівняння

(17)

Розв’язання. Маємо

і далі ( у даному випадку . оскільки область визначення рівняння (17) задається нерівністю ).

Поклавши , маємо квадратне рівняння , корені якого . Залишається розв’язати сукупність рівнянь .

З першого рівняння знаходимо . із другого . Ці значення є розв’язком також рівняння (17).

Приклад 7. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Переходячи в усіх логарифмах до основи 2, маємо

і далі

Із заданого рівняння слідує, що , а тому , тобто . Поклавши , отримаємо рівняння:

корні якого .

Тепер задача зводиться до розв’язанню наступної сукупності рівнянь:

З першого рівняння маємо , з другого- , з третього -.

Усі знайдені значення є коренями вихідного рівняння ( переконайтеся у цьому самостійно).

Приклад 8. Розв’яжемо рівняння .

Розв’язання. Розв’язати це рівняння розглянутими раніше у прикладах прийомами не вдасться. Знайдемо будь-який його корінь методом підбору. У даному випадку отримаємо . Проте вважати, що рівняння вже розв’язано, неможна: воно може мати і інші корені. Доведемо, що й інших коренів немає. Зрозуміло, що корені рівняння слід шукати у його області визначення, тобто у інтервалі . На цьому інтервалі функція спадає, а функція зростає, але тоді, якщо рівняння має корені, то лише один. Тож, – єдиний корінь заданого рівняння.

Приклад 9. Розв’яжемо рівняння

Розв’язання. Виписуємо обмеження на [)](https://yukhym.com/uk/doslidzhennia-funktsii/oblast-viznachennya-funktsiji.html):

Наступним кроком при рівних основах прирівнюємо вирази під логарифмами

Значення задовольняє ОДЗ, отже є розв'язком логарифмічного рівняння.

Приклад 10. Розв’язати рівняння .

Розв’язання. Серед обмежень на ОДЗ слід відзначити наступні: в чисельнику змінна під логарифмом повинна бути більшою нуля, те саме стосується і знаменника. Також знаменник дробу не повинен дорівнювати нулю. Всі ці умови можемо записати системою нерівностей, з яких і визначаємо ОДЗ.

На знайдених інтервалах шукаємо розв'язок рівняння. Перепишемо рівняння у вигляді .

За властивістю логарифма рівняння рівносильне наступному При рівних основах логарифма прирівнюємо функції .

В результаті прийдемо до квадратного рівняння розв'язок якого за теоремою Вієта рівний . Перший корінь не задовільняє ОДЗ, залишається єдиний розв'язок рівняння .

## **Задачі для самостійного опрацювання**

Розв’язати рівняння:

Відповідь:2.

Відповідь:.

Відповідь:1,5;3.

Відповідь:6.

Відповідь:1,5;10 .

Відповідь: 3;-5.

Відповідь:

Відповідь: 4;6.

Відповідь:41.

Відповідь:0,75.

Відповідь:3.

Відповідь:

Відповідь:4.

Відповідь:2.

Відповідь:2.

Відповідь:

Відповідь:-8;19.

Відповідь: -5;5.

Відповідь:

Відповідь: 1.

**Логарифмічні нерівності**

Будь-яку логарифмічну нерівність може бути у кінцевому вигляді зведено до нерівності виду

(1)

Теорема1. Якщо , то нерівність(1) рівносильна системі нерівностей:

(2)

Теорема2. Якщо , то нерівність(1)рівносильна системі нерівностей:

(3)

Зауваження: 1. У випадку коли , нерівність (1) і остання нерівність системи (2)- нерівності однакового сенсу. У випадку, коли нерівність(1) та остання нерівність системи (3) –нерівності протилежного змісту.

1. Перші дві нерівності систем (2) і (3) задають область визначення нерівності (1).
2. У системі (2) можливо пропустити першу нерівність, так як воно слідує з другої і третьої. Аналогічно у системі (3) можливо пропустити третю нерівність.

Приклад 1. Розв’яжемо нерівність

(4)

Розв’язування. Так як , то нерівність(4) можливо переписати так:

(5)

Тут основ логарифмів , тобто ,та, отже, за теоремою 2 нерівність (5) рівносильне наступній системі нерівностей:

Отримана система рівносильна нерівності з якої знаходимо -розв’язок нерівності(4).

Приклад 2. Розв’язати нерівність

Розв’язання. За теоремою 1 задана нерівність рівносильна наступній системі нерівностей:

звідси отримуємо:

а далі – розв’язок даної нерівності.

Приклад 3. Розв’яжемо нерівність

(6)

Розв’язування. Нерівність (6) рівносильно наступній системі нерівностей:

Далі маємо:

звідси

Так як і ми отримуємо:

(7)

Нарешті, використавши для другої нерівності системи (7) теорему 2, приходимо до такої системи:

, і далі,

звідси отримаємо - розв’язок нерівності(6).

Приклад 4. Розв’язати нерівність

(8)

Розв’язування. До цієї логарифмічної нерівності неможна застосувати ні теорему 1, ні теорему 2,оскіьки відносно основи логарифму ми знаємо, більше воно, ніж 1 або менше. Якщо , то до нерівності (8) застосовується теорема 1; якщо , то нерівність (8) треба розв’язувати з використанням теореми 2. Тому треба розглянути два випадки: 1) ; 2) .

Таким чином, задача зводиться до розв’язування наступної сукупності двох систем нерівностей

 ;

З першої системи маємо , з другої системи .

Отже,-розв’язок нерівності (8).

Прилад 5. Розв’язати нерівність

(9)

Розв’язування. Перепишемо нерівність (9) наступним чином:

Якщо мислити далі так само, як і у прикладі 4, приходимо до висновку, що це нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

або

розв’язавши цю сукупність, знаходимо одночасно і розв’язок нерівності (9) : .

Приклад 6. Розв’яжемо нерівність.

(10)

Розв’язування. Оскільки

то нерівність (10) можна переписати так:

(11)

Покладемо . Так як , отже ,, то нерівність (11) приймає вигляд : , звідси знаходимо .

Тепер задача зводиться до розв’язування сукупності логарифмічних нерівностей:

або

(12)

З першої нерівності сукупність (12)отримуємо , отже .

З другої нерівності сукупності (12) отримуємо , тобто . Отже - розв’язок нерівності (10).

Приклад7. Розв’язати нерівність. .

Розв’язання. Область визначення дає обмеження на змінну з двох сторін

Розкриваємо нерівність.

Отримали малий інтервал на якому виконується нерівність .

Приклад8. Розв’язати нерівність .

Розв’язання.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Розв’язок.

Приклад9. Розв’язати нерівність

Розв’язання.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Розв’язок..

Приклад10. Розв’язати нерівність .

Розв’язання.

За теоремою Вієта:

Розв’язок..

## **Задачі для самостійного опрацювання**

Розв’яжіть нерівності:

1. .

Відповідь:.

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

1. .

Відповідь:

Розв’яжіть систему нерівностей:

.

Відповідь:

**Список використаних джерел**

1. Литвиненко В.Н., Мордкович Ф.Г Практикум по елементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб.пособие для студентов физ-мат спец.пед.ин-товю -3-е изд., перераб. И доп.-М: «ABF», 1995-352 с.
2. Вересова Е.Е., Денисова Н.С. , Полякова Т.Н., Практикум по решению математических задач: Учеб. Пособие для пед. ин-тов.-М.: просвещение,1979. -240 с.
3. Башмаков М.М., Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 кл. средней школы 3-е издание: «Просвещение», 1993. -185с.
4. Болтянский В.Г., Сидоров .В., Шабунин М.И., Лекции и задания по элементарной математике.- М.:Наука, 1972.-592.

**Інтернет-ресурси**

1. <http://www.dut.edu.ua/uploads/l_810_16569693.pdf>
2. <http://cubens.com/uk/handbook/equations-and-inequalities/logarithmic-inequalities>
3. <https://yukhym.com/uk/matematika/logarifmichni-ta-pokaznikovi-rivnyannya-ta-nerivnosti.html>
4. <https://yukhym.com/uk/gdz-matematika/gdz-algebra-11-klas-merzlyak-logarifmichni-nerivnosti.html>