Перетворення виразів, що містять знак модуля

Зміст

1. Базові відомості про модуль

1.1. Алгебраїчне означення модуля та його геометричний зміст. Дві найголовніші властивості модуля: $|a| \geq 0$, $|a| = |-a|$

Математика – наука про величини і кількості, все, що можна виразити числом, належить математиці. Вона – основа багатьох наук, а ще вона – логічний тренінг розумової діяльності, розвиває наше мислення, пам’ять та уяву.

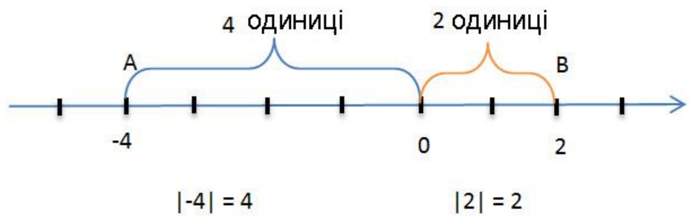
Як відомо, кожне дійсне число можна зобразити точкою на числовій прямій. Про кожну таку точку можна сказати справа чи зліва від нуля вона лежить, а також виміряти відстань від цієї точки до нуля. Таким чином, ми можемо з кожним дійсним числом зв’язати дві величини: його знак і його відстань до початку відліку.

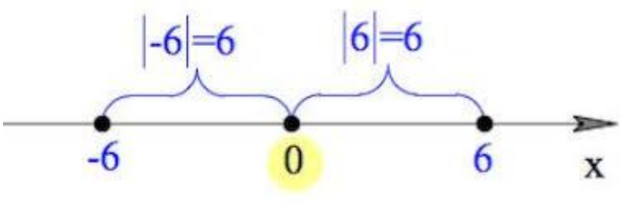
В перекладі з латинської modulus – «міра». Цей термін запропонував використовувати учень Ньютона Котс. Лейбніц також застосовував цей термін і позначав: mol x. Загальноприйняте поняття модуля **|x|** введено в 1841 році Веєрштрасом.

Модулем додатного числа називається саме це число.

Модулем (абсолютною величиною) числа a називають відстань від точки, яка зображує число на координатній прямій, до початку відліку. Це і є геометричний зміст модуля.

$$|a| \equiv \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$





З цього означення випливає, що модуль числа не може бути від’ємним числом. Якщо число лежить зліва від нуля знак його від’ємний, а справа – додатній, а число нуль знаку не має. Тому, модуль додатного числа дорівнює

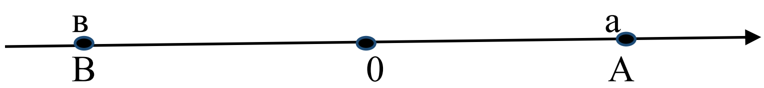
1.

самому числу, а модуль від’ємного, числу йому протилежному, а протилежні числа мають рівні модулі, оскільки знаходяться на однаковій відстані від початку відліку: |-8| = 8; |0| = 0;|-1,2| = |1,2| = 1,2.

Отже, модуль числа (абсолютна величина), позначається $|\boldsymbol{a}|$ та має такі властивості:

Алгебраїчне означення модуля	*Властивості модуля, які випливають з означення*	
	1.	$\mid a \mid \geq 0$
$\mid a \mid = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$	2.	$\mid a \mid = \mid -a \mid$
	3.	Якщо $\mid a \mid = \mid b \mid$, то $a = b$ або $a = -b$
	4.	Якщо $\mid a \mid = b$, то $b \geq 0$ і $a = b$ або $a = -b$

Геометричний зміст модуля



$\mid a \mid \geq 0 = \text{OA};$

$|a \cdot b| = AB.$

Тобто абсолютною величиною числа a (модулем) називається відстань від точки, що зображує дане число a координатної прямої, до початку координат. З визначення випливає, що: $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Таким чином, щоб *розкрити* модуль, необхідно визначити знак підмодульного виразу. Якщо воно додатне, то можна просто забирати знак модуля. Якщо ж підмодульний вираз від’ємний, його потрібно помножити на " мінус " , і знак модуля, знову-таки, більше не писати. Тобто, щоб знайти модуль числа (або як кажуть «розкрити модуль»), треба знати знак числа.

Приклади: 1. $|-5| = 5;$

2. $|0| = 0;$

3. $|-7| = -(-7) = 7;$

4. $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$

1.

Основні властивості модуля:

1. $|a| \geq 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $|a| \geq a$;
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, если $b \neq 0$;
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$;
7. $|a+b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \geq 0$;
8. $|a+b| = a+b$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$ и $b \geq 0$;
9. $|a-b| \leq |a| + |b|$;
10. $|a-b| = |a| + |b|$ тогда и только тогда, когда $ab \leq 0$;
11. $|a| - |b| \geq 0$ тогда и только тогда, когда $a^2 - b^2 \geq 0$.
12. $|a| \geq 0$ (Модуль будь-якого числа невід'ємне число);
13. $|-a| = |a|$ (Модулі протилежних чисел рівні);
14. $a \leq |a|$ (Число не перевищує свого модуля);
15. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (Модуль добутку дорівнює добутку модулей);
16. $\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{|b|}\right|$ $(b \neq 0)$ (Модуль дробу дорівнює модулю чисельника поділеного на модуль знаменника);
17. $|a^2| = |a|^2$;
18. $|a^2| = a^2$;
19. $|a^{2k}| = a^{2k}$ (Модуль степення числа дорівнює тому самому степенню модуля даного числа); (Модуль парного степеня будь-якого числа дорівнює тому самому степеню даного числа);
20. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Модуль суми не перевищує суми модулів доданків).

2. Деякі методи розв'язування рівнянь із модулями

Існує кілька типів рівнянь із модулем, для яких є кращий спосіб розв'язання. При цьому цей спосіб не єдиний. Наприклад, для рівняння виду: $|f(x)| = a$, где $a \geq 0$ переважним способом розв'язування буде перехід до сукупності: $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

1.

А для рівняння виду: $|f(x)| = g(x)$ також можна переходити до майже аналогічної сукупності, але оскільки модуль набуває тільки невід'ємних значень, то і права частина рівняння повинна бути невід'ємною. Цю умову потрібно дописати як загальне обмеження для всього прикладу. Тоді отримаємо систему: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array} \right. \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Обидва ці типи рівнянь можна розв'язувати й іншим способом: розкриваючи відповідним чином модуль на проміжках, де підмодульний вираз має певний знак. У цьому випадку отримуватимемо сукупність двох систем. Наведемо загальний вигляд розв'язань, що виходять для обох типів рівнянь, наведених вище:

$$|f(x)| = a \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -f(x) = a, \\ f(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$|f(x)| = g(x) \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Для розв'язування рівнянь, в яких міститься більш ніж один модуль, застосовується **метод інтервалів**, який полягає в наступному:

• Спочатку знаходимо точки на числовій осі, в яких обертається в нуль кожен із виразів, що стоять під модулем.

• Далі ділимо всю числову вісь на інтервали між отриманими точками та досліджуємо знак кожного з підмодульних виразів на кожному інтервалі. Зауважте, що для визначення знаку виразу треба підставити будь-яке значення x з інтервалу, крім граничних точок. Вибирайте значення x, які легко підставляти.

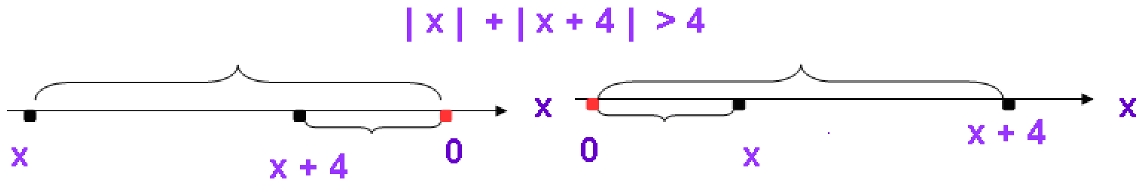
• Далі на кожному отриманому інтервалі розкриваємо всі модулі у вихідному рівнянні відповідно до їхніх знаків на даному інтервалі та розв'язуємо отримане звичайне рівняння. У підсумкову відповідь виписуємо тільки ті корені цього рівняння, які потрапляють у досліджуваний проміжок. Таку процедуру проводимо для кожного з одержаних інтервалів.

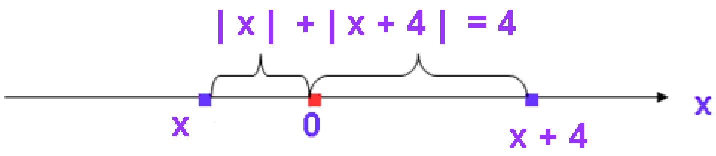
Приклади: Знайдіть найменше значення виразів, опираючись на властивості модуля. *(для перших двох виразів зробіть графічну ілюстрацію відповіді)*

1. **| x | + | x** + 4 **|**

1.

Розв'язання: | x | + | x + 4 | = | -x | + | x + 4 | ≥ | 4 | = 4

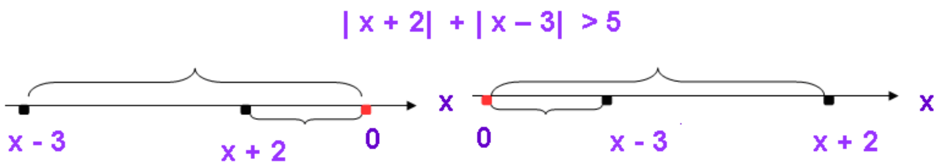


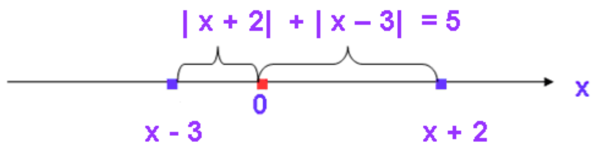


2. | x + 2| + | x – 3 |

Розв'язання: | x + 2| + | x – 3 | = | x + 2| + | - x + 3 | ≥ |5| = 5

Графічно це виглядає так:

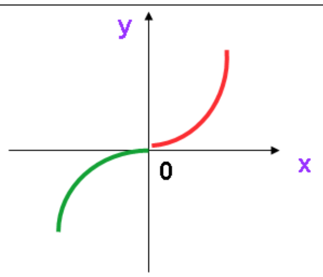
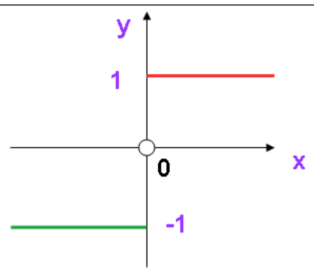
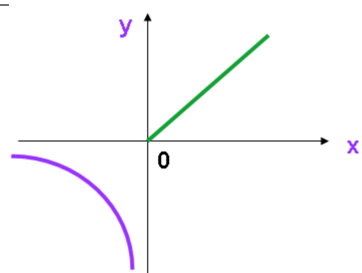




3. | 2x + 2| + | x – 3 | + |x – 4|

Розв'язання: | 2x + 2| + | x – 3 | + |x – 4| = | 2x + 2| + | 3 - x | + |4 - x | ≥ |2x + 2 + 3 - x + 4 – x| = 9

4. Побудувати графіки функцій:

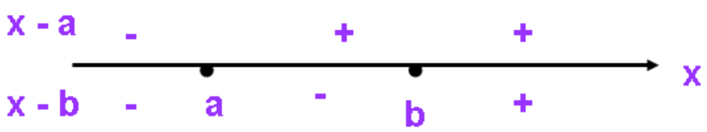
Рівень А	*Рівень Б*	*Рівень В*
$y = x\,\lvert x \rvert$	$y = \dfrac{x}{\lvert x \rvert}$	$y = x^{\frac{x}{\lvert x \rvert}}$
Спростимо формули, що задають функції:		
$y = x\,\lvert x \rvert = \begin{cases} x^2, x \geq 0 \\ -x^2, x < 0 \end{cases}$	$y = \dfrac{x}{\lvert x \rvert} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$	$y = x^{\frac{x}{\lvert x \rvert}} = \begin{cases} x, x > 0 \\ \dfrac{1}{x}, x < 0 \end{cases}$
		

1.

Алгоритм методу інтервалів

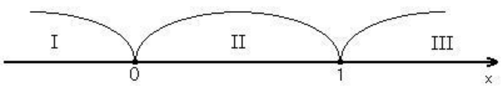
1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) виразу, рівняння чи нерівності і нанести її на числову пряму.
2. Прирівняти до нуля підмодульні вирази і знайти відповідні значення змінної. Нанести на числову пряму нулі підмодульних виразів і розбити область допустимих значень на систему інтервалів.
3. Знайти знаки під модульних виразів на кожному інтервалі.
4. Спростити вираз (розв'язати рівняння, нерівність) на кожному інтервалі.
5. Записати остаточний розв'язок рівняння і нерівності як об'єднання множин розв'язків на кожному інтервалі.

Приклад. Нехай у рівнянні $|x - a| + |x - b| = c$, $a < b$. Тоді розв'язання, згідно алгоритму, має вид:



$x < a$	$\boldsymbol{a} \le x \le \boldsymbol{b}$	$x > b$
$-x + a - x + b = c$ $-2x = c - a - b$ $x = -(c - a - b)/2$ Якщо $-(c - a - b)/2 < a$, то $x1 = -(c - a - b)/2$	$x - a - x + b = c$ $b - c = a$ *якщо числова рівність правильна, то відповіддю буде числовий проміжок* $a \le x \le b$, *якщо ні – розв'язків немає*	$x - a + x - b = c$ $2x = c + a + b$ $x = (c + a + b)/2$ Якщо $(c + a + b)/2 > b$, то $x = (c + a + b)/2$

Розв'яжемо рівняння за допомогою методу інтервалів.

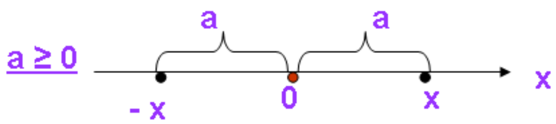
$\lvert x\rvert + \lvert x - 1\rvert = 1$  	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ -x - x + 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x - x + 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x + x - 1 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

1.

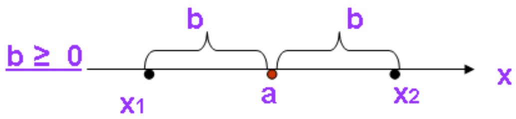
Крім методу інтервалів, існують і інші методи розв’язування рівнянь з модулем. Зокрема рівняння виду |f (x) | = |g(x)| можна розв’язати піднесенням обох частин до квадрату.

3. Рівняння, що містять знак модуля

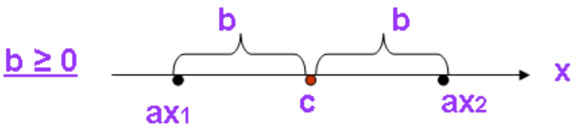
Щоб краще зрозуміти, як розв’язуються найпростіші рівняння з модулем, звернемося до геометричного змісту модуля. Як відомо, вираз $|a - b|$ означає відстань між точками a і b, а розв’язати рівняння $|x| = \boldsymbol{a}$, означає знайти такі числа x відстань, від яких до початку координат дорівнює $\boldsymbol{a}$**:**



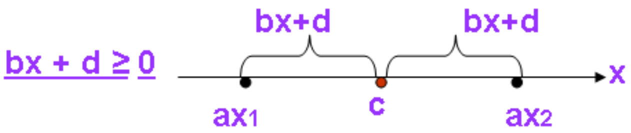
У рівнянні $|x - a| = b$ – відстань між точками a і x дорівнює b:



У рівнянні |ax - c| = b - відстань між точками ax і c дорівнює b:



У рівнянні $|ax - \mathrm{c}| = bx + d$,– відстань між точками ax і c дорівнює $bx + d$:



Очевидно, що рівняння мають корені лише тоді, коли вирази, які стоять у правій частині рівняння будуть невід’ємними.

З геометричної інтерпретації випливають такі алгоритми розв’язання:

$\boldsymbol{\vert x\vert = a,}$	$\boldsymbol{\vert x - a\vert = b}$	$\boldsymbol{\vert ax - c\vert = b,}$	$\boldsymbol{\vert ax - c\vert = bx + d}$

1.

$a<0,\quad \varnothing$ $a\ge 0\quad x=\left[\begin{array}{l}a\\-a\end{array}\right.$	$b<0$, розв'язків немає $\boldsymbol{b\ \ge\ 0}$ $x-a=\left[\begin{array}{l}b\\-b\end{array}\right.\ x=\left[\begin{array}{l}b+a\\-b+a\end{array}\right.$	$b<0\quad \varnothing$ $b\ge 0$ $ax-c=\left[\begin{array}{l}b\\-b\end{array}\right.$ $x_1=\frac{b+c}{a},x_2=\frac{-b+c}{a}$	$\begin{cases}bx+d\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}ax-c=bx+d\\ax-c=-bx-d\end{array}\right.\end{cases}$

Приклади: Розв'яжіть рівняння. У відповідь запишіть суму коренів.

1.

$\vert x\ +3\vert\ =\ 4$ $\boldsymbol{-6}$	$\vert 1-2x\vert\ =\ 0$ $\boldsymbol{0.5}$	$\vert$- 4x - 1$\vert$ = 6 $\boldsymbol{-\ 0,5}$
$\left[\begin{array}{l}x+3=4\\x+3=-4\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-7\end{array}\right.$	$1-2x=0$ $x=0{,}5$	$\left[\begin{array}{l}-4x-1=6\\-4x-1=-6\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=\frac{-7}{4}\\x=\frac{5}{4}\end{array}\right.$

2.

$\vert x\ -1\vert\ =\ 2x\ +\ 4$ -1	$\vert x+2\vert\ =\ 6x\ -\ 1$ $0{,}6$	$\boldsymbol{\vert 3x\ -\ 2\vert\ =\ 4x\ -\ 1}$ $\boldsymbol{3/7}$
$\begin{cases}2x+4\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x-1=2x+4\\x-1=-2x-4\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}x=-5\le -2\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}$	$\begin{cases}6x-1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x+2=6x-1\\x+2=-6x+1\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge \frac{1}{6}\\ \left[\begin{array}{l}x=0{,}6\\x=-\frac{1}{7}\le\frac{1}{6}\end{array}\right.\end{cases}$	$\begin{cases}4x-1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}3x-2=4x-1\\3x-2=-4x+1\end{array}\right.\end{cases}\begin{cases}x\ge \frac{1}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\le\frac{1}{4}\\x=\frac{3}{7}\end{array}\right.\end{cases}$

3. Визначити кількість коренів рівняння залежно від значення параметра а**:**

$\vert 3x\ -\ 4\vert\ =\ a\ +\ x$

$\begin{cases}a+x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}3x-4=a+x\\3x-4=-x-a\end{array}\right.\end{cases}$	$\begin{cases}x\ge -a\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{a}{2}+2\\x=1-\frac{a}{4}\end{array}\right.\end{cases}$	$\left[\begin{array}{l}x_1=\frac{a}{2}+2\ge -a\\x_2=1-\frac{a}{4}\ge -a\end{array}\right.\quad a\ge -\frac{4}{3}$

Відповідь: при а $<\ -4/3$ розв'язків немає; при а $=\ -4/$
3 один корінь (корені співпадають); при а $\ge\ -4/3$ два розв'язки.

4. $\boldsymbol{\vert\vert 3-x\vert\ -\ x\ +\ 1\vert\ +\ x\ =\ 6}$

1.

<table>
<tr><td colspan="2">||3-x| - x + 1| = 6 – x <=> $\begin{cases} 6-x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} |3-x|-x+1=6-x \\ |3-x|-x+1=x-6 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-x\ge 0 \\ |3-x|=5 \end{cases} \\ \begin{cases} 6-x\ge 0 \\ |3-x|=2x-7 \end{cases} \end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x\le 6 \\ |3-x|=5 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3-x=5 \\ 3-x=-5 \end{array}\right. \\ x\le 6 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=8\ge 6 \end{array}\right. \\ x\le 6 \end{cases}$
$x_1 = -2$</td><td>$\begin{cases} x\le 6 \\ |3-x|=2x-7 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3-x=2x-7 \\ 3-x=7-2x \end{array}\right. \\ x\le 6 \\ 2x-7\ge 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_2=\frac{10}{3}\le 3{,}5 \\ x_3=4 \end{array}\right. \\ 3{,}5\le x\le 6 \end{cases}$ $x_2 = 4$</td></tr>
<tr><td>Відповідь: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$.</td><td>Сума коренів:2</td></tr>
</table>

Рівняння , що містять суму модулів; їх геометрична інтерпретація

Рівняння та нерівності вигляду

a1|f1(x)|+a2|f2(x)|+…an(x)>< g(x)

Розв`язуються методом інтервалів. Потім використовуючи означення абсолютної величини, на кожному з цих проміжків розкривають модулі,що стоять у лівій частині. Таким чином переходять до розв`язання рівносильної сукупності систем ,що не містять знак модуля.

Приклад 1. $|x-1|+|2-x|=x$.

Розв'язання

За означенням маємо рівняння на сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 1 \\ -x+1+2-x=x \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x\le 2 \\ x-1+2-x=x \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x-1-2+x=x \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x\le 2 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ x=3 \end{cases} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \leftrightarrow x\in \{1;\ 3\}.$$

Відповідь: $x\in\{1;\ 3\}$.

1.

Приклад 2. $\frac{|x+3|+|x-1|-5}{\sqrt{x-2}} = 0.$

Розв'язання

Згідно області визначення $x > 2$. Але тоді вирази $x + 3$ та $x - 1$ додатні і ріняння рівносильно системі:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x + 3 + x - 1 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1{,}5$$

Відповідь: $x = 1{,}5$

$$\boxed{|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.}$$

Приклад 3. $|2x-1| = |2-3x|$.

Розв’язання

$$|2x-1| = |2-3x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = 2-3x \\ 2x-1 = 3x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = 3 \\ x = 1 \\ |x| \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{5}; 1\right\}$$

Відповідь: $x \in \left\{\frac{3}{5}; 1\right\}$.

1.

Рівняння, що містять різницю модулів

$$|x-a|=|x-b|$$

$$|x-a|=|x-b| \leftrightarrow a^2-2ax+x^2=b^2-2bx+x^2 \leftrightarrow 2(a-b)x=a^2-b^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ x \in R \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq b \\ x=\frac{a+b}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$|x-a|=|x-b| \leftrightarrow x=\frac{a+b}{2}$, $a \neq b$.

Тепер нехай

$|x-a|=|x-b|+c>0$, $a \neq b$.

$$\begin{cases} |x-a|=|x-b|+c \\ c=|a-b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq b \text{ при } b \geq a \\ x \leq b \text{ при } b \leq a \end{array}\right.;$$

$$\begin{cases} |x-a|=|x-b|+c \\ 0<c<|a-b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=b-l \text{ при } b>a \\ x=b+l \text{ при } b<a \end{array}\right.;$$

де $l=\frac{|a-b|-c}{2}$.

$$\begin{cases} |x-a|=|x-b|+c \\ c>|a-b| \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

Приклад 1. $|x-1|-|x-2|=2$.

Розв'язання

$|x-1|-|x-2|=2 \Leftrightarrow |x-1|=|x-2|+2$.

$|x-1|=|x-2|+2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад 2. $|x-1|=|x-3|+1$.

Відстань між точками $\{1\}$ та $\{3\}$ дорівнює $|1-3|=2>1$.

Враховуючи. що $3>1$ маємо $x=3-\frac{2-1}{2}=2{,}5$

Відповідь: 2.5

Модуль і параметр

Приклад. При всіх значеннях a розв'язати рівняння:

$$a|\sin 2x| = 1.$$

Розв'язання

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \le 0\\ x \in \emptyset\end{cases}\\ \begin{cases}a > 0\\ |\sin 2x| = \frac{1}{a}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a \le 0\\ a \in (0;1)\end{array}\right.\\ x \in \emptyset\end{cases}\\ \begin{cases}a \ge 1\\ 2x = \pm\arcsin\frac{1}{a} + \pi n, n \in Z\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

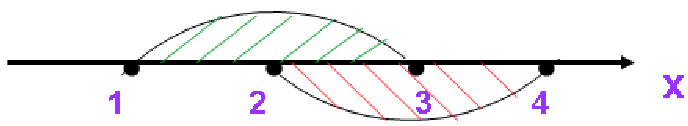
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \in (-\infty;1)\\ x \in \emptyset\end{cases}\\ \begin{cases}a \in [1;\infty)\\ x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{a} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: при $a \in (-\infty;1)$ $x \in \emptyset$;

при $a \in [1;\infty)$ $x = \pm\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{a} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Приклад .| x – 3 | + |x - 1| = | x - 2| + |x - 4|.

Ця рівність означає, що шукані корені – це координати прямої сума відстаней від яких до точок 1 і 3, та 2 і 4, рівні. Очевидно, що точки з проміжку [2;3] є коренями рівняння.



Рівняння, що містять суму модулів також можна розв'язати графічно.

Приклад

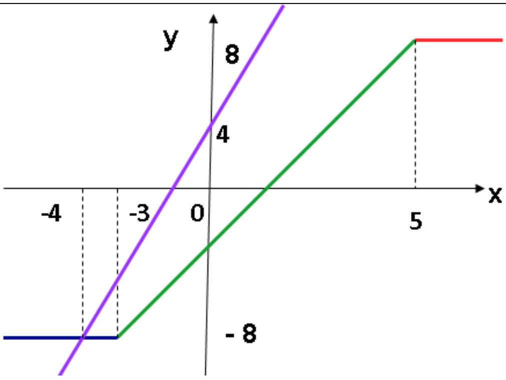
$|x + 3| - |x - 5| = 3x + 4.$

Шукані корені – точки перетину графіків функцій: $\begin{cases}y = |x+3| - |x-5|\\ y = 3x+4\end{cases}$

Розкривши модуль у першій функції, отримаємо формулу:

$y = \begin{cases}-8, & x < -3\\ 2x-2, & -3 \le x \le 5\\ 8, & x \ge 5\end{cases}$ *Побудувавши в одній системі координат*	

1.

графіки обох функцій отримаємо, що корінь рівняння: x = - 4	

4. Нерівності, що містять знак модуля

Нерівності з модулями можна і потрібно розв'язувати, послідовно розкриваючи модулі на проміжках їхньої знакосталості. Таким чином, потрібно діяти приблизно так само, як при розв'язуванні рівнянь з модулями (про вище п. 3). Але є кілька відносно простих випадків, у яких розв'язування нерівності з модулем зводиться до більш простого алгоритму. Так, наприклад, розв'язування нерівності виду:

$$|f(x)| < g(x)$$

Зводиться до розв'язування **системи** :

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Зокрема нерівність:

$$|f(x)| < a \quad (a > 0)$$

Може бути замінено рівносильною **системою**:

$$\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$$

Якщо в аналогічній нерівності замінити знак "менше" на "більше":

$$|f(x)| > g(x),$$

то його розв'язування зводиться вже до розв'язування **сукупності**:

1.

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Зокрема нерівність: $|f(x)| > a \quad (a > 0)$

може бути замінена рівносильною **сукупністю**:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$$

Таким чином, необхідно запам'ятати, що *для нерівності "модуль менший" ми отримуємо систему, де повинні одночасно виконуватися обидві умови*, а для нерівності *"модуль більший" ми отримуємо сукупність, в якій має виконуватись будь-яка з умов.*

При розв'язуванні раціональних нерівностей із модулем виду:

$$|f(x)| > |g(x)|$$

доцільно переходити до наступної рівносильної раціональної нерівності без модуля:

$$f^2(x) > g^2(x)$$

Таку нерівність не можна розв’язувати добуванням кореня (якщо добувати корінь, то знову потрібно поставити модулі, і ви повернетеся до початку, якщо про модулі забути, це рівносильно тому, щоб на самому початку про них просто забути, а це, звичайно, помилка). Всі дужки потрібно перенести ліворуч і, ні в якому разі не розкриваючи дужки, застосувати формулу різниці квадратів.

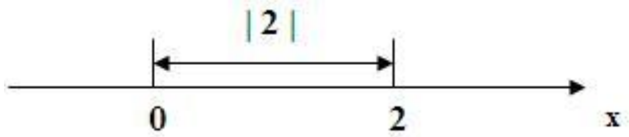
Отже, для **розв’язування всіх інших типів нерівностей з модулями,** крім зазначених вище, потрібно розкривати всі модулі, що входять у нерівність, на проміжках їх знакосталості і розв’язувати отримані нерівності. Нагадаємо докладніше загальний зміст цього *алгоритму*:

- Спочатку знаходимо точки на числовій осі, в яких обертається в нуль кожен із виразів, що стоїть під модулем.
- Далі поділяємо всю числову вісь на інтервали між отриманими точками та досліджуємо знак кожного з підмодульних виразів на кожному інтервалі. Зауважте, що для визначення знака виразу треба підставити будь-яке значення змінної з інтервалу, крім граничних точок. Вибирайте значення змінної, які легко підставляти.

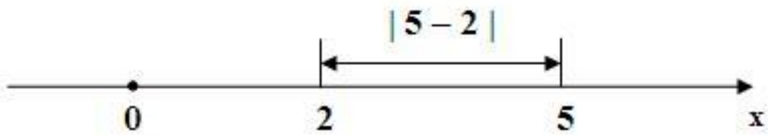
1.

- На кожному отриманому інтервалі розкриваємо всі модулі у вихідній нерівності відповідно до їх знаків на даному інтервалі і розв'язуємо отриману звичайну раціональну нерівність з урахуванням усіх правил і тонкощів розв'язування звичайних нерівностей без модулів.
- Розв'язування кожної з нерівностей, отриманих на конкретному проміжку, об'єднуємо в систему з самим проміжком, а всі такі системи об'єднуємо в сукупність. Таким чином, з розв'язків усіх нерівностей вибираємо тільки ті, які увійшли в проміжок, на якому була отримана дана нерівність, і записуємо у підсумкову відповідь.

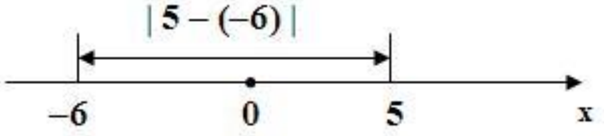
Перший спосіб розв'язування нерівностей з модулем. З означення модуля випливає, що для будь-якого числа *a* виконується нерівність $|a| \geq 0$. Геометрично $|a|$ – відстань від початку відліку (точки 0) до точки, координата якої є число *a*.



Відстань між точками *a* і *b* дорівнює $|a-b|$. Наприклад, якщо $a=5$, $b=2$, то $|5-2|=3$ – відстань між точками з координатами 2 і 5. Або $|2-5|=|-3|=3$.

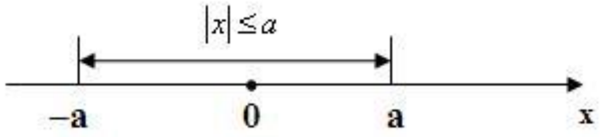


Відстань між точками 5 і –6 дорівнює: $|5-(-6)|=|5+6|=11$. Або $|-6-5|=|-11|=11$.



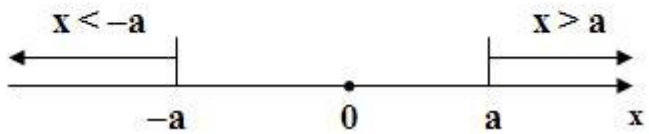
Геометрично нерівність $|x| \leq a$, де $a>0$, означає, що відстань від точки з координатою *x* до точки 0 не більша від *a*.

1.



Цю властивість мають точки $x \in [-a;\ a]$. Отже, нерівність $|x| \le a$ означає те саме, що й подвійна нерівність $-a \le x \le a$. Нерівність $|x| < a$ означає те саме, що й подвійна нерівність $-a < x < a$.

Нерівність $|x| > a,$ означає, що $x > a$ або $x < -a$. Нерівність $|x| \ge a$ означає, що $x \ge a$ або $x \le -a$.



Нерівності $|f(x)| < a,\quad |f(x)| \le a,\quad |f(x)| > a,\quad |f(x)| \ge a$, де $a > 0$, розв'язуються аналогічно, бо можуть бути зведені до попередніх заміною $f(x) = t$.

Другий спосіб розв'язування нерівностей з модулем. При розв'язуванні нерівностей, що містять змінну під знаком модуля, використовується означення модуля функції:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \ge 0 \\ -f(x), f(x) < 0. \end{cases}$$

Нерівність виду $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$, якщо $a > 0$,

Якщо $a \le 0$, то нерівність $|f(x)| < a$ розв'язків не має.

Нерівність виду $|f(x)| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > a, \\ f(x) < -a, \end{array}\right.$ якщо $a > 0$;

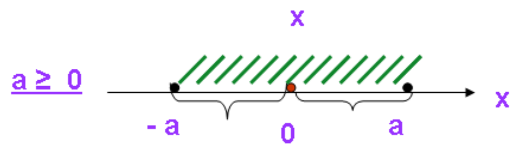
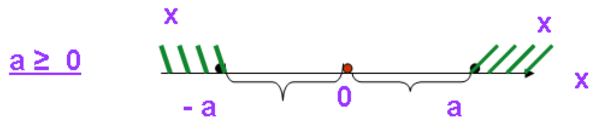
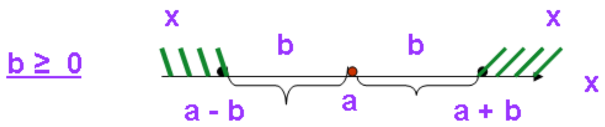
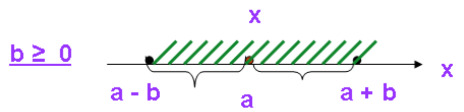
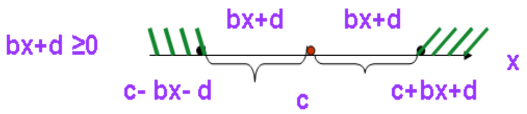
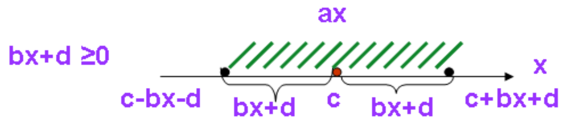
якщо $a < 0$, то розв'язком нерівності $|f(x)| > a$ буде множина допустимих значень функції $f(x)$;

1.

якщо $a = 0$, то розв'язком нерівності $|f(x)| > a$ буде множина тих *x*, для яких $f(x) \neq 0$.

5. Нерівності, що містять кілька модулів

Для розв'язування нерівностей, які містять більше одного модуля, застосовують метод інтервалів для модулів.

Нерівність	*Геометрична ілюстрація*	*Алгоритм розв'язання*
$\lvert x\rvert \leq a$	 *Якщо a < 0 x Є ∅*	$-a \leq x \leq a$
$\lvert x \rvert \geq a$,	 *Якщо a < 0, x є R*	$\left[\begin{array}{l} x \leq -a \\ x \geq a \end{array}\right.$
$\lvert x - a\rvert \geq b$	 Якщо b < 0, x єR	$\left[\begin{array}{l} x \leq a - b \\ x \geq a + b \end{array}\right.$
$\lvert x - a\rvert \leq b$	 Якщо b < 0, x є ∅	a - b ≤ x ≤ a + b
$\lvert ax - c\rvert \geq bx + d$,		$\left[\begin{array}{l} ax - c \leq -bx - d \\ ax - c \geq bx + d \end{array}\right.$
$\lvert ax - c\rvert \leq bx + d$	 Якщо bx+d < 0, x є ∅	$\begin{cases} ax - c \leq bx + d \\ ax - c \geq -bx - d \end{cases}$

Приклад :Розв'язати нерівність

$|5x - 3| > 2.$

1.

Розв’язання

Згідно з 1-им способом розв’язування нерівностей з модулем випливає, що $5x-3>2$ або $5x-3<-2$, тобто

$$\left[\begin{array}{l}5x-3>2,\\ 5x-3<-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<\dfrac{1}{5}\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right)\cup(1;\ \infty)$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right)\cup(1;\ \infty)$.

Приклад: Розв’язати нерівність $|3x+50|<-4$.

Розв’язання

Оскільки $|3x+50|\ge 0$, то початкова нерівність розв’язків не має.

Відповідь: $\varnothing$.

Приклад: Розв’язати нерівність

$|3x-8|<x-2$.

Розв’язання

Дану нерівність можна замінити сукупністю двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-8\ge 0,\\ 3x-8<x-2;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-8<0,\\ -(3x-8)<x-2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\dfrac{8}{3},\\ x<3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{8}{3},\\ x>2{,}5\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left[\dfrac{8}{3};\ 3\right)\\ x\in\left(2{,}5;\ \dfrac{8}{3}\right)\end{array}\right. \Rightarrow x\in(2{,}5;\ 3).$$

Відповідь: $x\in(2{,}5;\ 3)$.

Приклад: Розв’язати нерівність

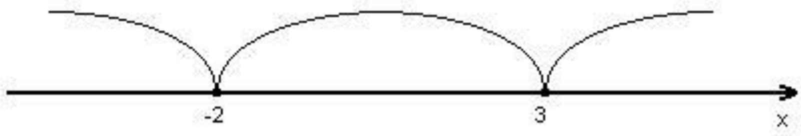
$|x-3|+|x+2|-x>5.$

Розв’язання

Для розв’язування даної нерівності використаємо метод інтервалів для модулів. Відзначимо на числовій прямій точки, в яких вирази, що

1.

знаходяться під знаком модулів, перетворюються в нуль. Це точки $x = -2$ і $x = 3$. Вся числова пряма розбивається цими точками на три проміжки:



1) Розглянемо проміжок **(**інтервал) $x \in (-\infty;\ -2)$:

Підставивши в підмодулеві вирази замість змінної *x* довільне значення з даного інтервалу, виявивши тим самим знак підмодулевого виразу, отримаємо нерівність $-x+3-x-2-x>5$, $\Leftrightarrow$ $-3x-4>0,$ $\Leftrightarrow$ $x<-\dfrac{4}{3}$.

Тоді $\left[\begin{array}{l} x \in (-\infty;\ -2) \\ x < -\dfrac{4}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x < -2.$

2) Розглянемо проміжок $x \in [-2;\ 3)$:

За тим самим принципом, що і на попередньому проміжку, маємо $-x+3+x+2-x>5 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0.$

Тоді $\left[\begin{array}{l} -2 \le x < 3, \\ x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow -2 \le x < 0.$

3) Розглянемо проміжок $x \ge 3$:

Маємо $x-3+x+2-x>5 \Leftrightarrow x>6$.

Тоді $\left[\begin{array}{l} x \ge 3, \\ x > 6 \end{array}\right. \Rightarrow x > 6.$

Об'єднаємо отримані розв'язки: $\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ -2 \le x < 0, \Rightarrow \\ x > 6; \end{array}\right. \quad x \in (-\infty;\ 0) \cup (6;\ \infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (6;\ \infty)$.

Приклад: Розв'язати нерівність

$$\frac{x^2 - 3|x| - 4}{x+1} < -3x$$.

Розв'язання

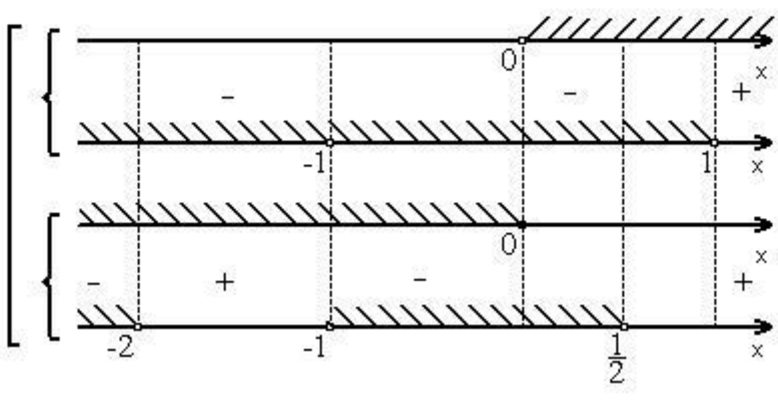
1.

Запишемо дану нерівність у вигляді сукупності двох систем:

$$\frac{x^2-3|x|-4}{x+1}<-3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{x^2-3x-4}{x+1}<-3x;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ \dfrac{x^2+3x-4}{x+1}<-3x;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{x^2-3x-4+3x(x+1)}{x+1}<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ \dfrac{x^2+3x-4+3x(x+1)}{x+1}<0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{4x^2-4}{x+1}<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ \dfrac{4x^2+6x-4}{x+1}<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ (x-1)(x+1)(x+1)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 0,\\ (2x-1)(x+2)(x+1)<0;\end{cases}\end{array}\right.$$



$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(0;\ 1),\\ x\in(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 0]\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 1).$$

Відповідь: $x\in(-\infty;\ -2)\cup(-1;\ 1)$.

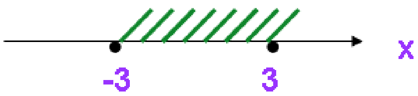
1.

Приклад : Розв'яжіть нерівність: $||x|+1|<4$. У відповідь запишіть всі цілі розв'язки нерівності.

<table>
<tr><th>І спосіб</th><th>ІІ спосіб</th></tr>
<tr><td>

$\begin{cases}\lvert x\rvert+1<4\\ \lvert x\rvert+1>-4\end{cases}$ $\begin{cases}\lvert x\rvert<3\\ \lvert x\rvert>-5\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<3\\ x>-3\end{array}\right.\\ x\in R\end{cases}$

$-\mathbf{3}<x<3$



</td><td>

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ \lvert x+1\rvert<4\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \lvert -x+1\rvert<4\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x+1<4\\ x+1>-4\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ -x+1<4\\ -x+1>-4\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 0\\ x<3\\ x>-5\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x>-3\\ x<5\end{cases}\end{array}\right.$

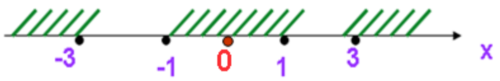
$-\mathbf{3}<x<3$

</td></tr>
</table>

Приклад : Розв'яжіть нерівність: $||\boldsymbol{y}|-\mathbf{2}|>1$. У відповідь запишіть всі цілі числа, які <u>**не**</u> належать множині розв'язків.

<table>
<tr><th>І спосіб</th><th>ІІ спосіб</th></tr>
<tr><td>

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geq 0\\ \lvert y-2\rvert>1\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ \lvert -y-2\rvert>1\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}y-2>1\\ y-2<-1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ \left[\begin{array}{l}-y-2>1\\ -y-2<-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}y>3\\ y<1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ \left[\begin{array}{l}y<-3\\ y>-1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$



</td><td>

$\left[\begin{array}{l}\lvert y\rvert-2>1\\ \lvert y\rvert-2<-1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lvert y\rvert>3\\ \lvert y\rvert<1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}y>3\\ y<-3\\ -1<y<1\end{array}\right.$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Відповідь: -2; 2</td></tr>
</table>

Приклад :Розв'яжіть кожну нерівність двома способами.
(Нерівності розв'язані першим способом)

<table>
<tr><th>$\boldsymbol{||3-x|-x+1|+x\leq 6}$</th><th>$\boldsymbol{||3-x|-x+1|+x\geq 6}$</th></tr>
<tr><td>

$||3-x|-x+1|\leq 6-x$

$\begin{cases}\lvert 3-x\rvert-x+1\leq 6-x\\ \lvert 3-x\rvert-x+1\geq -6+x\end{cases}$

$\begin{cases}\lvert 3-x\rvert\leq 5\\ \lvert 3-x\rvert\geq 2x-7\end{cases}$ $\begin{cases}\lvert x-3\rvert\leq 5\\ \left[\begin{array}{l}x-3\geq 2x-7\\ x-3\leq 7-2x\end{array}\right.\end{cases}$

$\begin{cases}-2\leq x\leq 8\\ \left[\begin{array}{l}x\leq 4\\ x\leq \frac{3}{10}\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}-2\leq x\leq 8\\ x\leq 4\end{cases}$

</td><td>

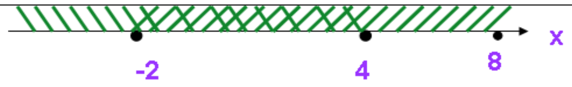
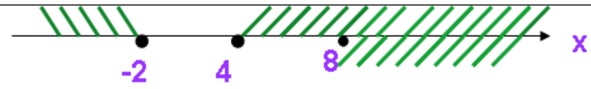
$||3-x|-x+1|\geq 6-x$

$\left[\begin{array}{l}\lvert 3-x\rvert-x+1\geq 6-x\\ \lvert 3-x\rvert-x+1\leq -6+x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lvert 3-x\rvert\geq 5\\ \lvert 3-x\rvert\leq 2x-7\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x-3\geq 5\\ x-3\leq -5\end{array}\right.\\ \begin{cases}x-3\leq 2x-7\\ x-3\geq 7-2x\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\geq 8\\ x\leq -2\end{array}\right.\\ \begin{cases}x\geq 4\\ x\geq \frac{10}{3}\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\geq 8\\ x\leq -2\\ x\geq 4\end{array}\right.$

</td></tr>
</table>

1.

 Відповідь: $[-2; 4]$	 Відповідь: $R \setminus [-2; 4]$

Завдання для самостійного опрацювання

1. $|\mathbf{2x - 1}| = |\mathbf{3x + 2}|$ $\{\mathbf{4,5}\}$;

2. $|\mathbf{3 - 2x}| = |\mathbf{4x + 1}|$ $\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}};\ \mathbf{-2}\right\}$;

3. $|\mathbf{x - 2}| + |\mathbf{x - 4}| = \mathbf{3}$ $\{\mathbf{1,5};\ \mathbf{4,5}\}$;

4. $|\mathbf{x}| - \mathbf{2}|\mathbf{x + 1}| = 5$ Розв’язків немає

5. $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$ $\{\mathbf{4}\}$;

6. $\frac{|x-2|-1}{2x-1}=2$ $\{\mathbf{0,6}\}$;

7. $|\mathbf{x} - \mathbf{2}| < 5$ $\mathbf{x} \in (\mathbf{-3}; \mathbf{7})$;

8. $|\mathbf{x} + \mathbf{2}| < 5$ $\mathbf{x} \in (\mathbf{-7}; \mathbf{3})$;

9. $|\mathbf{x} + \mathbf{3}| > 4$ $\mathbf{x} \in (-\infty; \mathbf{-7}) \cup (\mathbf{1}; +\infty)$;

10. $|\mathbf{x} - \mathbf{5}| < 2$ $\mathbf{x} \in (\mathbf{3}; \mathbf{7})$.

Список використаної літератури

12. Баран О.І. Математичні мініатюри. - К.: Ленвіт, 2007. - 508с.

13. Василенко О. Серенада математиці. – Х.: Видав.гр. «Основа», 2003.- 128 с. (Серія «Бібліотека журналу «Математика в школах України»»; Вип.12)

14. Лобанова Л.В.,Фінкельштейн Л.П. Вибрані задачі елементарної математики. – К.: Вища шк.. Головне вид – во, 1989. - 96 с.

15. Мерзляк А.Г.,Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підруч. Для 8 кл.з поглиб. вивч. математики. - Х.: Гімназія, 2008.- 368 с.

16. Енциклопедія педагогічних технологій та інновацій / Автор – укладач Н.П.Наволокова. – Х.: Вид.група «Основа»,2011.- 176 с. – (Серія «Золота педагогічна скарбниця»)

17. Алгебра і початки аналізу: Підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 352 с.

18. Алгебра і початки аналізу: Підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.

1.

19. Алгебра і початки аналізу: Підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень / Є.П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.

20. Алгебра і початки аналізу: Підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф. рівень / Є.П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.

21. Математика: завдання та тести. Посібник-довідник для вступників до вищих навчальних закладів/ В.А.Вишенський та ін. – К.: Генеза, 1993 – 288 с.

22. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра. 8 клас. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики. – Х.: Гімназія, 2009. – 386 с.

23. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 10 класу загальноосвіт. навч. закладів. – Х.: Світ дитинства, 2008. – 448 с.

24. Нелін Є.П., Долгова О.Є. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвіт. Навч. закладів. – Х.: Гімназія, 2009. – 329 с.

25. Практикум з розв’язування задач з математики / Михайловський В.І., Тарасюк В.Є., Ченакал Є.О. та ін. – К.: Вища шк., 1989. – 423 с.

26. Скороход А.В. Вибрані питання елементарної математики. / Вишенський В.А., Дороговцев А.Я., Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. – Київ: Вища школа, 1982. – 456 с.

27. Ясінський В.В. Математика. Київ. 2006. – 122 с.

28. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Зодіак – ЕКО, 2002.

Додаткові

29. Байтова М. О., Бельнюкова Г. В. та ін. Методика викладання математики в початкових класах. — К.: Вища школа, 1982.

30. Богданович М. В. Методика розв'язування задач у початковій школі. К.: Вища школа, 1984.

31. Гісь Ольга. В Країні Міркувань: Посібник з розвитку логічного і творчого мислення для дітей 1–4 кл. / О.Гісь О, О.Яцків. – Львів: Світ, 2001. – 272 с.

32. Дутко Л. Складання і розв'язування задач з логічним навантаженням (3 та 4 класи) / Л.Дутко, В.Московченко // Початкова школа. – 2005. – № 2. – С.15–18.

1.

33. Карнаух П.М. Цікаві завдання з математики. 2 клас: Навчальний посібник. – Тернопіль: Навчальна книга / П.М. Карнаух– Богдан, 2007. – 40 с.

34. Карнаух П.М. Цікаві завдання з математики. 3 клас / П.М. Карнаух – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 40 с.

35. Карнаух П.М. Цікаві завдання з математики. 4 клас: Навчальний посібник. / П.М. Карнаух – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2007. – 48 с.

36. Ковальчук В.Ю. Тестові завдання з математики для учнів початкових класів при вивченні теми: "Величини та одиниці їх вимірювання". / В.Ю.Ковальчук, Л. С. Баб'як, Л.П.Силюга, Н.І.Стасів – Дрогобич, 2000. – 33 с.

37. Математика: контрольні індивідуальні завдання: Посібник для слухачів підготовчих відділень та вступників до вищих навчальних закладів/ В.Д. Гетманцев, О.Ф. Саушкін та ін. – К.: Либідь, 1994. – 272 с.

38. Шунда Н.М. Функції та їх графіки. – К.: Радянська школа, 1976. – 192 с.

Інтернет-ресурси

39.http://formula.com.ua/

40. https://www.twirpx.com/

41.http://rep.btsau.edu.ua/bitstream/BNAU/559/1/Elementarna%20matematika.pdf

21. https://www.twirpx.com/

42. http://www.univ.kiev.ua/ru/

43.http://bibliotekar.ru/

44.http://freepanorama.org.ua/